Université Ferhat Abbas Sétif 1

Faculté de Technologie

Département d'Enseignement De Base En Technologie

Examens du module Physique3

2009_2015

Présentés par

Dr. Nadjet Aklouche

(Physique3)

2ème Année LMD

Université Ferhat Abbas – Sétif
Faculté des Sciences de l'ingénieur
Département de Tronc Commun S.E.T.I
2ème Année LMD

Corrigé

15 Février 2009

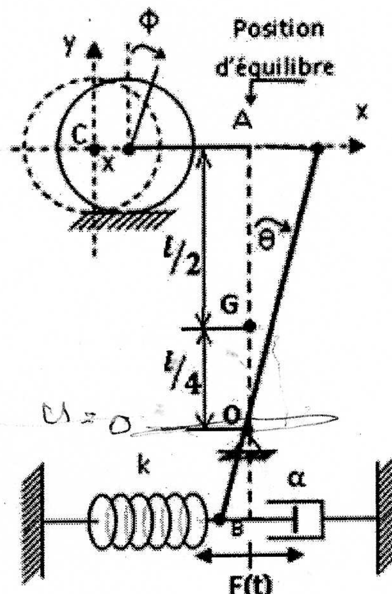
Temps alloué : 1h30

Contrôle de Physique 3

Exercice1: (10 pts)

Soit le système mécanique composé d'un disque homogène (m_1, R) $(J_{/c} = \frac{1}{2}m_1R^2)$, qui peut rouler sans glisser sur un plan horizontal, d'une barre AB (m_2, l) qui peut osciller autour d'un axe O perpendiculaire au plan du mouvement ($J_{/G} = \frac{1}{12}m_2l^2$, G: centre de gravité), d'un ressort k et d'un amortisseur α. La barre horizontale CA est de masse négligeable.

1- Sachant que Le système effectue des oscillations de faibles amplitudes. $sin(\theta) \approx \theta$, $cos(\theta) \approx \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$
Calculer le Lagrangien L du système.



2- Montrer que le lagrangien L et la fonction de dissipation D Peuvent s'écrire sous la forme:
$$L = \frac{1}{2}M_0l^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}K_0l^2\theta^2 + C^{te}; \quad D = \frac{1}{2}\alpha_0l^2\dot{\theta}^2$$
Donner les expressions de M_0, K_0 et α_0. C^{te}: Constante

3- Le point B est soumis à une force extérieure $F(t) = F_0e^{j\omega t}$
Etablir l'équation différentielle du mouvement et déduire ω_0 et δ, ainsi que la condition d'oscillation en fonction de :
m_1, m_2, l, k, g, et α.

4- Donner la solution générale, en calculant les expressions de l'amplitude et de la phase des oscillations forcées.

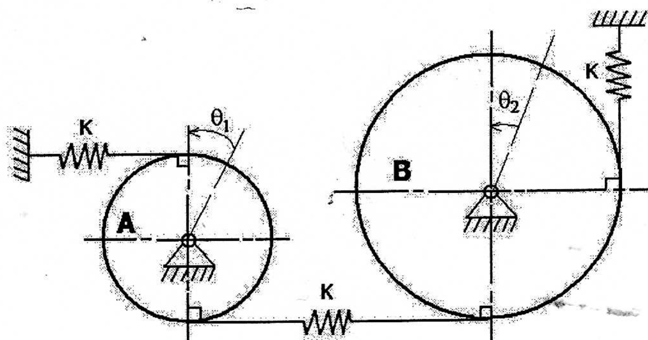
Exercice2: (10 pts)

Une partie d'une machine est modélisée par le système de la figure ci-dessous. Deux disques uniformes A et B de même masse M, libres en rotation sont fixées par leurs centres, et couplées par un ressort. Les trois ressorts ont la même raideur K. Le disque A est de rayon R_1, le disque B est de rayon $R_2 = 2\,R_1$.

1 - Ecrire les équations différentielles du mouvement. $(J_{Disque} = \frac{1}{2}MR^2)$

2- Déterminer les fréquences et les modes propres dans le cas des faibles amplitudes.

3- Avec les conditions initiales suivantes: $\theta_1(0) = \theta_0$; $\dot{\theta}_1(0) = 0$; $\theta_2(0) = 0$; $\dot{\theta}_2(0) = 0$, donner les expressions exactes de $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.



Bonne chance

Solution de l'exercice 1

Le disque m1 roule sans glisser : une rotation ϕ et une translation $x_C = R\phi$

La masse m2 tourne autour de l'axe O : $xG = \frac{l}{4}\sin\theta$ et $yG = \frac{l}{4}\cos\theta$

Mouvement du point B : $xB = -\frac{l}{4}\sin\theta$

Relation entre le mouvement du disque et celui de la barre $R\phi = \frac{3l}{4}\sin\theta \approx \frac{3l}{4}\theta$ (1)

1- Calcul du Lagrangien du système

Energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}J_C\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_C{}^2 + \frac{1}{2}J_O\dot{\theta}^2$$

$J_C = \frac{1}{2}m_1R^2 \quad J_O = J_G + m_2(l/4)^2 \quad J_G = \frac{1}{12}m_2l^2$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1R^2\right)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_1R^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m_2l^2 + m_2(l/4)^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{3}{4}m_1R^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m_2l^2 + \frac{1}{16}m_2l^2\right)\dot{\theta}^2 \qquad T = \frac{3}{4}m_1R^2\dot{\phi}^2 + \frac{7}{96}m_2l^2\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{3}{4}m_1\left(\frac{3l}{4}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{7}{96}m_2l^2\dot{\theta}^2 \qquad T = \frac{27}{64}m_1l^2\dot{\theta}^2 + \frac{7}{96}m_2l^2\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\left(\frac{27}{32}m_1 + \frac{7}{48}m_2\right)l^2\dot{\theta}^2}$$ (2)

Energie potentielle :

$$U = U_k + U_G = \frac{1}{2}kx_B{}^2 + mg\left(\frac{l}{4}\cos\theta - \frac{l}{4}\right)$$

$$U = \frac{1}{2}k\left(\frac{l}{4}\sin\theta\right)^2 + mg\frac{l}{4}(\cos\theta - 1)$$

Puisque : $sin(\theta) \approx \theta$, $cos(\theta) \approx \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$

$$U = \frac{1}{32}kl^2\theta^2 + m_2g\frac{l}{4}\left(-\frac{\theta^2}{2}\right) \qquad U = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}kl^2\theta^2 - mg\frac{l}{4}\theta^2\right)$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{16} - \frac{m_2g}{4l}\right)l^2\theta^2}$$ (1)

Le Lagrangien :

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{27}{32}m_1 + \frac{7}{48}m_2\right)l^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{16} - \frac{m_2 g}{4l}\right)l^2\theta^2$$

0,5

2- Forme générale du Lagrangien et de la fonction de dissipation :

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{27}{32}m_1 + \frac{7}{48}m_2\right)l^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{16} - \frac{m_2 g}{4l}\right)l^2\theta^2$$

On pose :

$$M_0 = \left(\frac{27}{32}m_1 + \frac{7}{48}m_2\right)$$ 0,5 et $$K_0 = \left(\frac{k}{16} - \frac{m_2 g}{4l}\right)$$ 0,5

On obtient :

$$L = \frac{1}{2}M_0 l^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}K_0 l^2\theta^2$$

La fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2}\alpha \dot{x}_B{}^2 \qquad D = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{l}{4}\dot{\theta}\cos\theta\right)^2$$

0,25

$$D \approx \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{l}{4}\dot{\theta}\right)^2$$

$$D = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{16}\right)l^2\dot{\theta}^2$$

~~0,5~~ 0,25

On pose : $$\alpha_0 = \frac{\alpha}{16}$$ on obtient : $$D = \frac{1}{2}\alpha_0 l^2\dot{\theta}^2$$

0,5

3- Détermination de l'équation différentielle:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}+\left|\frac{\partial r}{\partial \theta}\right|F(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=M_0 l^2\ddot{\theta} \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta}=-K_0 l^2\theta \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}=\alpha_0 l^2\dot{\theta}$$

$$r(t)=\frac{l}{4}\sin\theta \qquad \frac{\partial r}{\partial \theta}=\frac{l}{4}\cos\theta \approx l/4$$

$$M_0 l^2\ddot{\theta}+K_0 l^2\theta=-\alpha_0 l^2\dot{\theta}+\frac{l}{4}F_0 e^{j\omega t}$$ 0,5

$$\ddot{\theta}+\frac{\alpha_0}{M_0}\dot{\theta}+\frac{K_0}{M_0}\theta=\frac{1}{4M_0 l}F_0 e^{j\omega t}$$

$$\ddot{\theta}+2\delta\dot{\theta}+\omega_0{}^2\theta=Be^{j\omega t}$$

Avec : $\delta=\frac{\alpha_0}{2M_0}=\frac{\frac{\alpha}{16}}{2\left(\frac{27}{32}m_1+\frac{7}{48}m_2\right)}=\frac{\alpha}{32\left(\frac{27}{32}m_1+\frac{7}{48}m_2\right)}$

$$\delta=\frac{\alpha}{\left(27m_1+\frac{14}{3}m_2\right)}$$ 0,5

$$\omega_0{}^2=\frac{K_0}{M_0}=\frac{\left(\frac{k}{16}-\frac{m_2 g}{4l}\right)}{\left(\frac{27}{32}m_1+\frac{7}{48}m_2\right)}$$ 0,5

$$B=\frac{l}{4M_0}F_0$$

Condition d'oscillation : $\frac{k}{16}-\frac{m_2 g}{4l}>0 \qquad k>\frac{4m_2 g}{l}$ 0,5

4- Solution de l'équation différentielle:

$$\theta(t)=\theta_h(t)+\theta_p(t)$$

$\theta_h(t)=Ce^{-\delta t}\sin(\omega_a t+\varphi)$ 0,25 avec : $\omega_a=\sqrt{\omega_0{}^2-\delta^2}$ solution homogène

$\theta_p(t)=A\sin(\omega t+\phi)$ 0,25 solution particulière

$A=\frac{B}{\sqrt{(\omega_0{}^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}}$ 0,5 et $\phi=Arctg\left(-\frac{2\delta\omega}{\omega_0{}^2-\omega^2}\right)$ 0,5

2- Détermination des fréquences et des modes propres : (4)

La solution est de forme sinusoïdale on a donc : $\ddot{\theta}_i = -\omega^2\theta_i$ 0.5

$$\begin{cases} -\omega^2\theta_1 + \omega_0^2\theta_1 = a_1\theta_2 \\ -\omega^2\theta_2 + \omega_0^2\theta_2 = a_2\theta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)\theta_1 - a_1\theta_2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)\theta_2 - a_2\theta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)\theta_1 - a_1\theta_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ -a_2\theta_1 + (\omega_0^2 - \omega^2)\theta_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases} \quad \text{(I)}$$ 0,5

$$\begin{pmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & -a_1 \\ -a_2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & -a_1 \\ -a_2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$ 0.5

$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - a_1a_2 = 0$ avec : $a_1a_2 = 4\left(\frac{k}{m}\right)^2$

$(\omega_0^2 - \omega^2) = \pm\sqrt{4\left(\frac{k}{m}\right)^2} \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 \pm 2\frac{k}{m}$

Pour $\boldsymbol{\omega = \omega_1}$: $\omega_1^2 = \omega_0^2 + 2\frac{k}{m} \Rightarrow \omega_1^2 = 4\frac{K}{M} + 2\frac{k}{m}$ ce qui donne : $\omega_1^2 = 6\frac{K}{M}$ 0,5

Pour $\boldsymbol{\omega = \omega_2}$: $\omega_2^2 = \omega_0^2 - 2\frac{k}{m} \Rightarrow \omega_2^2 = 4\frac{K}{M} - 2\frac{k}{m}$ ce qui donne : $\omega_2^2 = 2\frac{K}{M}$ 0,5

On remplaçant les valeurs de ω_1^2 et ω_2^2 ainsi que la valeur de ω_0^2 dans le système (I), équation (1) on obtient :

Pour $\boldsymbol{\omega_1}$: $\left(4\frac{K}{M} - 6\frac{K}{M}\right)\theta_1 - 4\frac{K}{M}\theta_2 = 0 \Rightarrow \theta_1 = -2\theta_2$ 0.5

$\omega_1 = 6\frac{K}{M}$ $\quad \boldsymbol{V_1}\binom{-2}{1}$ ou bien $\boldsymbol{V_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Pour $\boldsymbol{\omega_2}$: $\left(4\frac{K}{M} - 2\frac{K}{M}\right)\theta_1 - 4\frac{K}{M}\theta_2 = 0 \Rightarrow \theta_1 = 2\theta_2$ 0.5

$\omega_2 = 2\frac{K}{M}$ $\quad \boldsymbol{V_2}\binom{2}{1}$ ou bien $\boldsymbol{V_2}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta_1} \\ \boldsymbol{\theta_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(\boldsymbol{\omega_1}.\boldsymbol{t} + \boldsymbol{\varphi_1}) + \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(\boldsymbol{\omega_2}.\boldsymbol{t} + \boldsymbol{\varphi_2})$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta_1(t) = -2.A.\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + 2.B.\cos(\omega_2.t + \varphi_2)} \\ \boldsymbol{\theta_2(t) = A.\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B.\cos(\omega_2.t + \varphi_2)} \end{cases}$$ 0.5

Solution de l'exercice 2

1 - Les équations différentielles du mouvement : (4,5)

$T = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{4}M{R_1}^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{4}M{R_2}^2\dot{\theta}_2^2$ (1)

$U = \frac{1}{2}K(R_1\theta_1)^2 + \frac{1}{2}K(R_2\theta_2)^2 + \frac{1}{2}K(R_1\theta_1 - R_2\theta_2)^2$ (1,5)

$L = T - U$

$$L = \frac{1}{4}M{R_1}^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{4}M{R_2}^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}K(R_1\theta_1)^2 - \frac{1}{2}K(R_2\theta_2)^2 - \frac{1}{2}K(R_1\theta_1 - R_2\theta_2)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_1} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right) = \frac{1}{2}M{R_1}^2\,\ddot{\theta}_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right) = \frac{1}{2}M{R_2}^2\,\ddot{\theta}_2$$ (0,5)

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1} = -2K{R_1}^2\theta_1 + KR_1R_2\theta_2 \qquad \frac{\partial L}{\partial\theta_2} = -2K{R_2}^2\theta_2 + KR_1R_2\theta_1$$ (0,5)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}M{R_1}^2\,\ddot{\theta}_1 + 2K{R_1}^2\theta_1 = KR_1R_2\theta_2 \\ \frac{1}{2}M{R_2}^2\,\ddot{\theta}_2 + 2K{R_2}^2\theta_2 = KR_1R_2\theta_1 \end{cases}$$

$R_2 = 2R_1$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left[\frac{2K{R_1}^2}{\frac{1}{2}M{R_1}^2}\right]\theta_1 = \left[\frac{KR_1R_2}{\frac{1}{2}M{R_1}^2}\right]\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 + \left[\frac{2K{R_2}^2}{\frac{1}{2}M{R_2}^2}\right]\theta_2 = \left[\frac{KR_1R_2}{\frac{1}{2}M{R_2}^2}\right]\theta_1 \end{cases}$$

Avec $R_2 = 2R_1$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left[\frac{4K}{M}\right]\theta_1 = \left[\frac{4K}{M}\right]\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 + \left[\frac{4K}{M}\right]\theta_2 = \left[\frac{K}{M}\right]\theta_1 \end{cases}$$ (0,5) (0,5)

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = a_1\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2\theta_2 = a_2\theta_1 \end{cases}$$

tel que : $\omega_0^2 = 4\frac{K}{M}$; $a_1 = 4\frac{K}{M}$; $a_2 = \frac{K}{M}$

3- Expressions *de* $\theta_1(t)$ *et* $\theta_2(t)$: 1,5

Avec les conditions initiales suivantes :

$\theta_1(0) = \theta_0 \quad \dot{\theta}_1(0) = 0 \quad \theta_2(0) = 0 \quad \dot{\theta}_2(0) = 0$

$$(II)\begin{cases} -2.A.\cos\varphi_1 + 2.B.\cos\varphi_2 = \theta_0 & \ldots\ldots(1) \\ 2.A.\omega_1.\sin\varphi_1 - 2.B.\omega_2.\sin\varphi_2 = 0 & \ldots\ldots(2) \\ A.\cos\varphi_1 + B.\cos\varphi_2 = 0 & \ldots\ldots(3) \\ -A.\omega_1.\sin\varphi_1 - B.\omega_2.\sin\varphi_2 = 0 & \ldots\ldots(4) \end{cases}$$

On multipliant l'équation (4) par 2 et on l' additionnant avec l'équation (2) on obtient :

$-4.B.\omega_2.\sin\varphi_2 = 0$ ➔ $\sin\varphi_2 = 0$ ce qui donne : $\varphi_2 = k\pi$

Et multipliant l'équation (4) par -2 et on l' additionnant avec l'équation (2) on obtient :

$4.B.\omega_1.\sin\varphi_1 = 0$ ➔ $\sin\varphi_1 = 0$ ce qui donne : $\varphi_1 = k\pi$

Donc : $\varphi_1 = \varphi_2 = k\pi$ (0.5)

Remplaçant les valeurs de φ_1 et φ_2 dans (1) et (3) :

$$\begin{cases} -2.A + 2.B = \theta_0 \\ A + B = 0 \end{cases}$$

$$A = -B = -\frac{\theta_0}{4}$$ (0.5)

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2}.\cos(\omega_1.t) + \frac{\theta_0}{2}.\cos(\omega_2.t) \\ \theta_2(t) = -\frac{\theta_0}{4}\cos(\omega_1.t) + \frac{\theta_0}{4}\cos(\omega_2.t) \end{cases}$$ (0,5)

Université Ferhat Abbas – Sétif
Faculté des Sciences de l'ingénieur
Département de Tronc Commun S.E.T.I

$2^{ème}$ Année LMD
11 Février 2010
Temps alloué :1h30

Contrôle de Physique 3

Exercice 1 :(5 points)

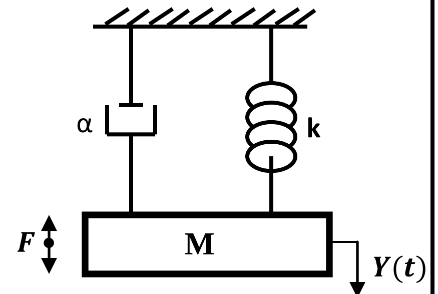


Figure $N^0$1

Une masse M est fixée à un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α (Voir figure $N^0$1)..

I- Etude du système libre non amorti.

1. **Donner l'équation différentielle du mouvement.**
2. **Déduire la pulsation propre ω_0 des oscillations libre non amorti ainsi que la solution y(t).**

II- Etude du système libre amorti.

1. **Donner l'équation différentielle du mouvement.**
2. **Déduire la pulsation ω_a des oscillations libres faiblement amorties en fonction de M, k et α. Déterminer la solution y(t).**

III- Etude du système forcé amorti.

La force F agissant sur M est sinusoïdale : $F = F_0 \sin \Omega t$.

1. **Donner la nouvelle équation différentielle du mouvement ?**
2. **Trouver la solution y(t).**

Exercice 2 :(7 points)

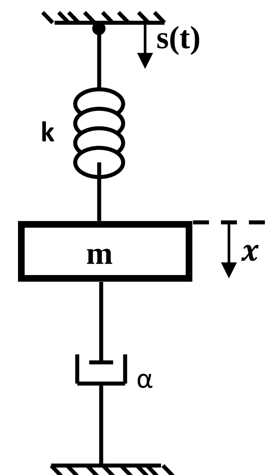


Figure $N^0$2

Une masse m, suspendue à un ressort de raideur k, est attachée à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. Elle effectue un mouvement amorti (Voir figure $N^0$2). Le point d'attache du ressort est soumis à un déplacement s(t) : $s(t) = S_0\, e^{j\omega t}$,

1. **Calculer le Lagrangien du système.**
2. **Déduire l'équation différentielle du mouvement.**
3. **Trouver les expressions de l'amplitude A et de la phase Φ et de la solution particulière représentant le régime permanent.**

Exercice 3 :(8 points)

Une masse m_1 glisse sans frottement sur un plan horizontal et entraine un pendule (m_2, l) dans son mouvement. Un ressort horizontal, de constante k se situe à une distance $\overline{OA} = a$ et relie les deux oscillateurs, (Voir figure $N^0$3).

1. **Ecrire les équations du mouvement en fonction de x et θ.**
2. **Calculer les pulsations du système et déduire les modes propres, On donne :**
   $m_1=m_2=m$, $a=l/4$, $mg=\frac{15}{16}kl$.
3. **Donner les équations du mouvement x (t) et θ(t).**

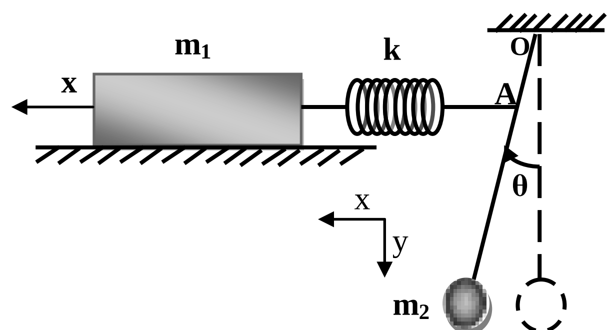
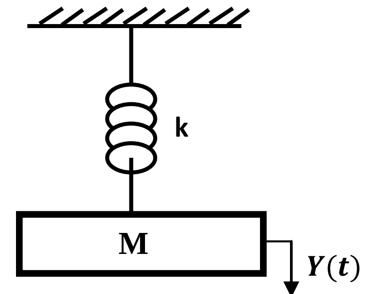


Figure $N^0$3

Solution de l'exercice 1

Dans la figure N°1, la masse M est fixée à un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α.



I. *Etude du système libre non amorti.*

3. L'équation différentielle du mouvement.

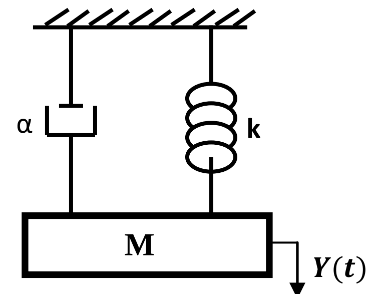
$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

4. a) La pulsation propre ω_0 des oscillations libre non amorti.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

b) la solution est sinusoïdale du type y = $a\cos(\omega_0 t + \varphi)$

II. *Etude du système libre amorti.*



3. L'équation différentielle du mouvement.

$$\ddot{y} + 2\delta y + \omega_0^2 y = 0 \text{ avec } \delta = \frac{\alpha}{2M} \quad et \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

4. a) La pulsation ω_a des oscillations libre amorti.

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{k}{M} - \left(\frac{\alpha}{2M}\right)^2}$$

b) La solution :
Le système peut osciller : donc $\delta < \omega_0 \rightarrow y(t) = C\, e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$

III- Etude du système forcé amorti.

La force F agissant sur M est sinusoïdale : $F = F_0 \sin \omega t$.

1.Equation différentielle du mouvement forcé amorti :

$$M\ddot{y} + \alpha\dot{y} + ky = F_0 \sin\omega t \quad \text{ou encore} \quad \ddot{y} + 2\delta\dot{y} + {\omega_0}^2 = \frac{F_0}{M}\sin\omega t$$

$$avec: \delta = \frac{\alpha}{2M} \quad et \ \ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

La nouvelle solution : $y(t) = C\, e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi) + A \sin(\Omega t + \Psi)$

Avec : $A = \frac{\frac{F_0}{M}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 4\delta^2\Omega^2}}, \ \Psi = -Arctg\ \frac{-2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$

Solution de l'exercice 2

La masse m et l'amortisseur α effectuent des oscillations verticales donc $y_m = y_\alpha = x$
Le ressort lié à la masse m est soumis à un déplacement forcé $s(t) = a \cos \omega t$

Donc : $\{x_k = x - s$ **avec s(t)=**

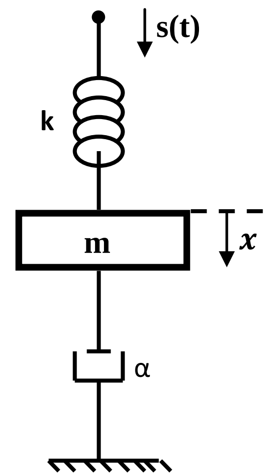


Figure N⁰2

4. **Calcule du Lagrangien du système.**

Energie cinétique :

T=T$_m$**=** $\frac{1}{2} m\, \dot{x}^2$

Energie potentielle :

U= U$_K$**=** $\frac{1}{2} k\, (x - s)^2$

La fonction de dissipation

$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$

La fonction de Lagrange:

L=T-U

$$L = \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k\, (x - s)^2$$

5. **Détermination de l' équation différentielle :**

$$\left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}, \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -k(x-s), \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x}$$

$$\Longrightarrow \quad m\ddot{x} - k(x-s) = -\alpha\dot{x}$$

Donc :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\, a\cos\omega t \quad avec \quad \delta = \frac{\alpha}{2m} \quad et\ \ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

---

6. l'expression de la solution particulière représentant le régime permanent.

On a : la solution particulière est de la forme $x_p(t) = A\ \cos(\omega t + \varphi)$

$$x(t) = \frac{a\omega_0^2}{\sqrt{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2\right]}} \cos(\omega t + \varphi)$$

Tels que : $A = \frac{a\omega_0^2}{\sqrt{\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2\right]}}$ **et** $\varphi = Arctan\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$

7. Calcule du facteur d'amortissement δ pour que, lorsque $\omega = \omega_0$ (pulsation propre du système), l'amplitude des mouvements de la masse m soit égale à 20a.

a = 0,5 cm, k=10^3 N/m, m=0,1 kg.

$$A = \frac{a\omega_0^2}{\sqrt{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right]}} \quad et \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Pour $\omega = \omega_0$ $\quad on\ a$: $\quad A = \frac{a\omega_0^2}{2\delta\omega_0} = \frac{a\omega_0}{2\delta}$

Donc : $\delta = \frac{a\omega_0}{2A}$,

AN : A=20a et $\omega_0 = 100\ s^{-1}$ Donc : $\delta = \frac{\omega_0}{100} = 2,5\ s^{-1}$

Solution de l'exercice 3

Le chariot de masse M glisse sans frottement sur un plan horizontal donc $x_M = x$

Le ressort horizontal k relis les deux oscillateurs donc $\{x_k = x - a\sin\theta$

La mass m tourne autour de l'axe O, donc $\begin{cases} x_m = L\sin\theta \rightarrow \dot{x}_m = L\dot{\vartheta}\cos\theta \\ y_m = L\cos\theta \rightarrow \dot{y}_m = -L\dot{\vartheta}\sin\theta \end{cases}$

1.Equations différentielles du mouvement

Energie cinétique :

T $= T_M + T_m$

T= $\frac{1}{2}M\dot{x}^2\ \frac{1}{2}\ mL^2\dot{\theta}^2$

Energie potentielle :

U= $U_K + U_m$

U=$\frac{1}{2}k\,(x - a\sin\theta)^2 - mgL\cos\theta$

La fonction de Lagrange:

L=T-U

L= $\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\ mL^2\dot{\theta}^2\ \ -\frac{1}{2}k\,(x - a\sin\theta)^2 + mgL\cos\theta$

Détermination des équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x}, \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -k(x - a\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ML^2\ddot{\theta}, \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = ak(x - a\theta) - mgl\theta$$

Avec : $\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$

$$\Longrightarrow \begin{cases} M\ddot{x} + k(x - a\theta) = 0 \\ mL^2\ddot{\theta} - ak(x - a\theta) + mgL\theta = 0 \end{cases}$$

Donc les équations du mouvement en fonction de x et θ sont :

$$\begin{cases} M\ddot{x} + kx = ak\theta \\ mL^2\ddot{\theta} + (mgL + a^2k)\theta = akx \end{cases}$$

2. Détermination des pulsations et des modes propres :

On a : ***M* =1 *kg, L* =1 *m, m* =4 *kg, a* =0.2 *m, k* =10 *N/m, g= 9,81 m/s²***

Donc les équations différentielles deviennent:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 10x = 2\theta \\ 4\ddot{\theta} + 39,6\theta = 2x \end{cases}$$

a. Calcul des pulsations du système :

On suppose que la solution est sinusoïdale donc : $\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x \\ \ddot{\theta} = -\omega^2\theta \end{cases}$

On aura : $\begin{cases} -\omega^2 x + 10\,x = 2\theta \\ -4\omega^2\theta + 39,6\theta = 2x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (10 - \omega^2)x - 2\theta = 0 \\ (39,6 - 4\omega^2)\theta - 2x = 0 \end{cases}$

On peut écrire les eux équations sous la forme matricille comme suit :

$$\begin{pmatrix} 10 - \omega^2 & -2 \\ -2 & 39,6 - 4\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} 10-\omega^2 & -2 \\ -2 & 39,6-4\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

L'équation au valeurs propres : $(10-\omega^2)(39,6-4\omega^2)-4=0$

$$\Longrightarrow \quad (10-\omega^2)(9,9-\omega^2)-1=0$$

$$\Longrightarrow \quad \omega^4-19,9\omega^2+98=0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \omega_1^2 = 8.95 \\ \omega_2^2 = 10.95 \end{cases}$$

b.<u>Les vecteurs propres :</u>

$$\omega^2={\omega^2}_1=8,95 \rightarrow\ 1.05\,x=\ 2\theta \rightarrow \theta=0,53x\ \rightarrow \overrightarrow{V_1}\ \begin{pmatrix}1\\0,53\end{pmatrix}$$

$$\omega^2={\omega^2}_2=10,95 \quad \rightarrow\ 2x=-4,2\,\theta \rightarrow \theta=-0,48x \quad \rightarrow \overrightarrow{V_2}\ \begin{pmatrix}1\\-0,48\end{pmatrix}$$

3. <u>Les équations du mouvements:</u>

Les solutions des équations différentielles sont de la forme :

$$\begin{pmatrix}x(t)\\\theta(t)\end{pmatrix}=A\overrightarrow{V_1}\cos(\omega_1+\varphi_1)+B\overrightarrow{V_2}\cos(\omega_2+\varphi_2)$$

$$\begin{pmatrix}x(t)\\\theta(t)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\0.53\end{pmatrix}\cos(\omega_1+\varphi_1)+B\begin{pmatrix}1\\-0.48\end{pmatrix}\cos(\omega_2+\varphi_2)$$

Donc :

$$\begin{cases} x(t)\ = A\ \cos\ (\omega_1+\varphi_1)\ +B\cos(\omega_2+\varphi_2) \\ \theta(t)=0.5\,3A\cos(\omega_1+\varphi_1)-0.48B\cos(\omega_2+\varphi_2) \end{cases}$$

Contrôle Spécial de Physique 3

Exercice 1 : Questions de cours (05 points)

1- Le Lagrangien d'un système mécanique est donné par :

$$L = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2\right)^2 + g(m_1 l_1 + m_2 l_2)\cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2$$

a) Donnez le type de couplage.
b) Ecrire les équations différentielles du mouvement.

2- Le Lagrangien d'un système mécanique est donné par :

$$L = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_1 g l_1\cos\theta_1 + m_2 g l_2\cos\theta_2 - \frac{1}{2}ka^2(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)^2$$

a) Donnez le type de couplage.
b) Ecrire les équations différentielles du mouvement

3- Donnez dans l'ordre la mise en équation d'un système couplé de 2 degrés de liberté :
1- On écrit les 2 solutions générales des équations différentielles du mouvement.
2- On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques.
3- On substitue ω_1 dans l'une des 2 équations et l'on obtient le 1er mode propre.
4- On écrit les 2 équations différentielles en fonction des coordonnées généralisées.
5- On obtient 2 pulsations propres ω_1 et ω_2.
6- On substitue ω_2 dans l'une des 2 équations et l'on obtient le 2ème mode propre.

Exercice 2(07 points)

Le système de la figure **N°1** est constitué d'une masse M attachée à un amortisseur De coefficient d'amortissement visqueux α et à deux ressorts ; le premier de masse négligeable et de constante de raideur $2k$, le deuxième de masse **m** et de constante de raideur k.

1. Trouver le système équivalent.

I. Etude du système libre non amorti

1. Trouver l'équation différentielle du mouvement.
2. Déduire la pulsation propre ω_0 et la solution de l'équation différentielle du mouvement.

II. Etude du système libre amorti

1. Trouver l'équation différentielle du mouvement.
2. Calculer le facteur d'amortissement δ, la pulsation des oscillations amorties ω_a et le décrément logarithmique **D**.
3. Donner la solution de l'équation différentielle du mouvement dans le cas des oscillations faiblement amorties.

III. Etude du système forcé amorti

Le système est soumis à une excitation extérieure de mouvement $\mathbf{S(t) = S_0 \sin \omega t}$.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement forcé amorti.

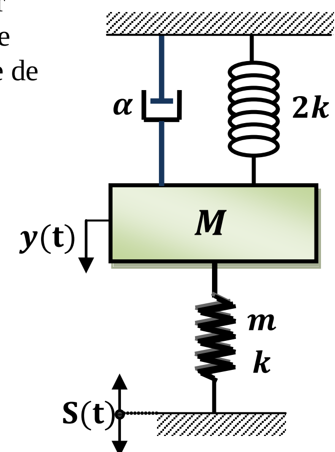


Figure N°1

Exercice 3 (08 points)

Dans le système de la figure 2, le disque de masse M et de rayon R roule sans glissement sur un plan horizontal. Sachant que :

$OA = R, et\ OB = \frac{L}{2}$.

1. Dessiner la nouvelle position du système après une rotation d'un angle θ autour du point O.
2. Trouver la l'équation différentielle du mouvement libre amorti.
3. Donner la solution de l'équation différentielle dans le cas d'un système faiblement amorti.
1. Déduire les valeurs de ω_0, δ et ω_a.

On donne le moment d'inertie du disque: $J/_O = \frac{1}{2}MR^2$

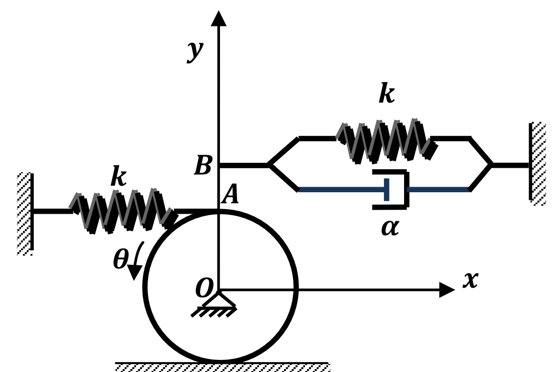


Figure N°2

Corrigé de l'examen spécial de Physique 3

Exercice 01

1.a) Couplage Inertiel……………………………………………………….…..….0.5 point

b) $\begin{cases}(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + gl_1(m_1+m_2)\,\theta_1 = -m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2 \\ m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2gl_2.\theta_2 = -m_2l_2l_1\ddot{\theta}_1\end{cases}$ **………………….………01point**

2.a) Couplage Elastique……………………………………………………..……0.5 point

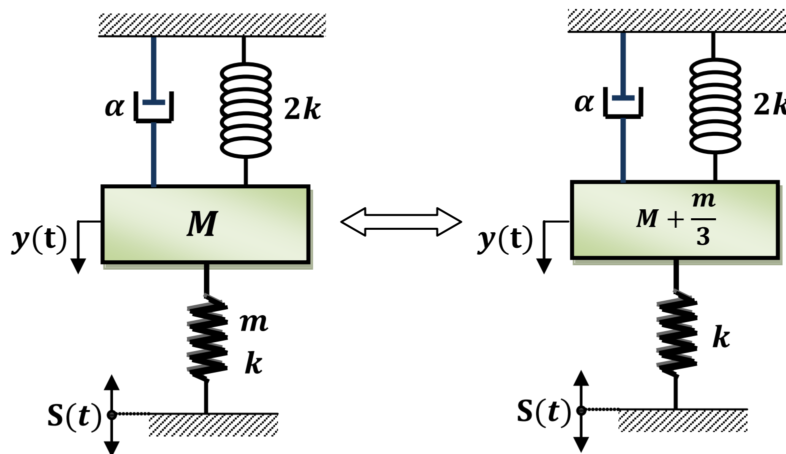
b) $\begin{cases}m_1l^2{}_1\ddot{\theta}_1 + (ka^2 + m_1gl_1)\theta_1 = ka^2\theta_2 \\ m_2l^2{}_2\ddot{\theta}_2 + (ka^2 + m_2gl_2)\theta_2 = ka^2\theta_1\end{cases}$ **……………………………………....01point**

3. La mise en équation du système couplé de 2 degrés de liberté passe par la méthode à suivre suivante :

1–On écrit les 2 équations différentielles en fonction des coordonnées généralisées...**0.5 point**
2–On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques…………**0.5 point**
3–On obtient 2 pulsations propres ω_1 et ω_2 ……………………………………………**0.5 point**
4–On substitue ω_1 dans l'une des 2 équations et l'on obtient le 1er mode propre……. **0.5 point**
5–On substitue ω_2 dans l'une des 2 équations et l'on obtient le 2ème mode propre…...**0.5 point**
6–On écrit les 2 solutions générales des équations différentielles du mouvement…...**0.5 point**

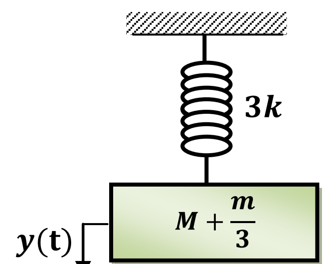
Exercice 02

1. **Le système équivalent :**
   - **Le ressort de masse m contribue seulement avec $\frac{m}{3}$ donc la masse totale du système est égale à : $M+\frac{m}{3}$**
   - **Les 02 ressorts ($2k$) et (k) n'ont pas le même déplacement ; ils ne sont pas en parallèles donc :**



I. Etude du système libre non amorti

1. L'équation différentielle du mouvement :
   Dans le cas d'un système libre non amorti : les 02 ressorts ont le même déplacement $y(t)$
   Donc on peut calculer le ressort équivalent : $k_e = 2k + k = 3k$



- **L'énergie cinétique du système:** $T = \frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)\dot{y}^2$
- **L'énergie potentielle du système:** $U = \frac{1}{2}(3k)\,y^2$
- **La fonction de Lagrange :** $L = T - U \Rightarrow L = \frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)\dot{y}^2 - \frac{1}{2}(3k)\,y^2$
- **L'équation de Lagrange** : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$ $\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -3ky\end{cases}$

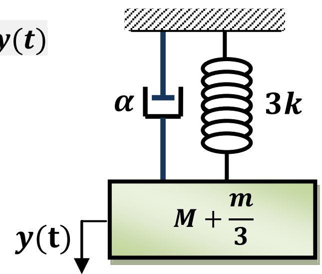
  En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura : $\left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y} + 3ky = 0$

2. **a)** Déduire la pulsation propre ω_0 : $\left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y} + 3ky = 0 \Rightarrow \begin{cases}\ddot{y} + \frac{3k}{M+\frac{m}{3}}y = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0\end{cases}$

$$\omega_0^2=\frac{3k}{M+\frac{m}{3}}=\frac{9k}{3M+m} \Longrightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{9k}{3M+m}}$$

b) La solution de l'équation différentielle du mouvement : $y(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$

II. <u>Etude du système libre amorti</u>



Dans le cas d'un système libre amorti : les 02 ressorts ont le même déplacement $y(t)$

Donc on peut calculer le ressort équivalent : $k_e=2k+k=3k$

- **L'énergie cinétique du système:** $T=\frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)\dot{y}^2$
- **L'énergie potentielle du système:** $U=\frac{1}{2}(3k)\,y^2$
- **La fonction de dissipation :** $D=\frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$
- **<u>La fonction de Lagrange :</u>** $L=T-U \Longrightarrow L=\frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)\dot{y}^2-\frac{1}{2}(3k)\,y^2$
- **<u>L'équation de Lagrange</u>** : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{y}}$

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)=\left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y}\\ \frac{\partial L}{\partial y}=-3ky\\ \frac{\partial D}{\partial \dot{y}}=\alpha\dot{y}\end{cases}$$

1. L'équation différentielle du mouvement : En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura :

$$\left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y}+\alpha\dot{y}+3ky=0$$

2. Le facteur d'amortissement $\boldsymbol{\delta}$, la pulsation des oscillations amorties ω_a et le décrément logarithmique **D**.

$$\left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y}+\alpha\dot{y}+3ky=0 \Longrightarrow \begin{cases}\ddot{y}+\frac{\alpha}{M+\frac{m}{3}}\dot{y}+\frac{9k}{3M+m}y=0\\ \ddot{y}+2\delta\dot{y}+\omega_0^2y=0\end{cases}$$

Donc : $2\delta=\frac{\alpha}{M+\frac{m}{3}} \Longrightarrow \delta=\frac{3\alpha}{6M+2m}$, $\omega_a=\sqrt{{\omega_0}^2-\delta^2}=\sqrt{\left(\frac{9k}{3M+m}\right)-\left(\frac{3\alpha}{6M+2m}\right)^2}$,

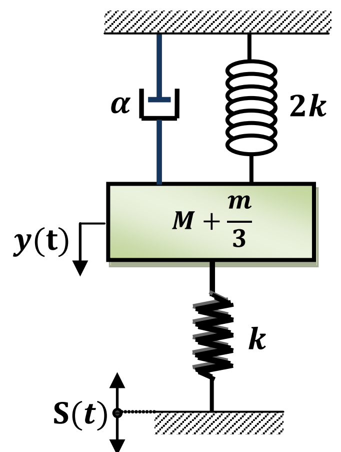
$$D=\delta T_a=\delta\,\frac{2\pi}{\omega_a}=\frac{3\alpha}{6M+2m}\,\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{9k}{3M+m}\right)^2-\left(\frac{3\alpha}{6M+2m}\right)^2}} \Longrightarrow D=2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{3\alpha}{6M+2m}\right)^2}{\left(\frac{9k}{3M+m}\right)-\left(\frac{3\alpha}{6M+2m}\right)^2}}$$

3. La solution de l'équation différentielle du mouvement dans le cas des oscillations faiblement amorties.

$$\delta<\omega_0:\ y(t)=C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t+\varphi) \Longrightarrow y(t)=C\,e^{-\left(\frac{3\alpha}{6M+2m}\right)t}\sin\left(\sqrt{\left(\frac{9k}{3M+m}\right)-\left(\frac{3\alpha}{6M+2m}\right)^2}\ t+\varphi\right)$$

I. <u>Etude du système forcé amorti</u>

Le système est soumis à une excitation extérieure de mouvement $S(t)=S_0\sin\omega t$.



- **L'énergie cinétique du système:** $T=\frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)\dot{y}^2$
- **L'énergie potentielle du système:** $U=\frac{1}{2}(2k)\,y^2+\frac{1}{2}k\,(y-S)^2$
- **La fonction de dissipation :** $D=\frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$
- **<u>La fonction de Lagrange :</u>**

$$L=T-U \Longrightarrow L=\frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)\dot{y}^2-\frac{1}{2}(2k)\,y^2-\frac{1}{2}k\,(y-S)^2$$

- **<u>L'équation de Lagrange</u>** : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{y}}$

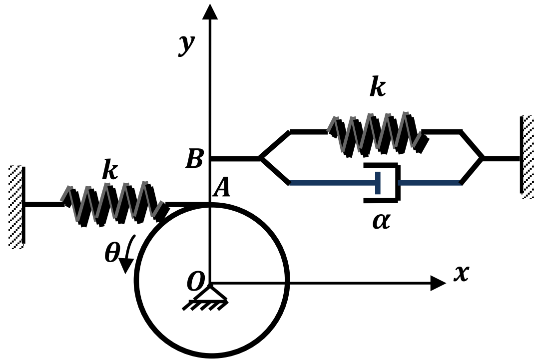
$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)=\left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y}\\ \frac{\partial L}{\partial y}=-2ky-k(y-S)\\ \frac{\partial D}{\partial \dot{y}}=\alpha\dot{y}\end{cases}$$

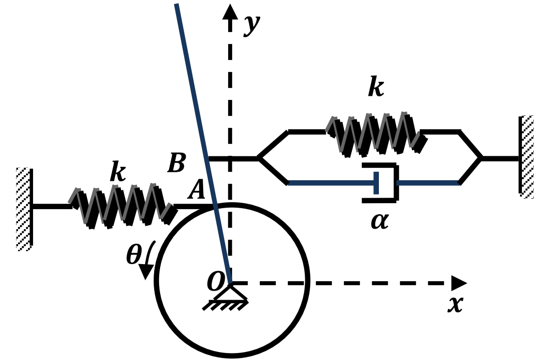
1. L'équation différentielle du mouvement forcé amorti: En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura :

$$\left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y}+\alpha\dot{y}+2ky+k(y-S)=0 \Leftrightarrow \left(M+\frac{m}{3}\right)\ddot{y}+\alpha\dot{y}+3ky=k\,S_0\sin\omega t$$

Exercice 3

1. On dessine la nouvelle position du système après une rotation d'un angle $\boldsymbol{\theta}$ autour du point **O**.





A l'équilibre **Au mouvement**

- **Les coordonnées des éléments du système :**
- Le disque de masse **M** et de rayon tourne autour de O.
- Le ressort $\boldsymbol{k}$ est attaché en un point A du disque donc : $\boldsymbol{k}\{\boldsymbol{R\theta}$
- L'amortisseur $\boldsymbol{\alpha}$ est attaché en un point B donc : $\boldsymbol{\alpha}\left\{\frac{L}{2}\sin\theta \rightarrow \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right.$
- le ressort $\boldsymbol{k}$ est attaché en un point B donc : $\boldsymbol{k}\left\{\frac{L}{2}\sin\theta\right.$
- **L'énergie cinétique** **du système** : $T = T_M$
  - L'énergie cinétique de la masse M : $T_M = \frac{1}{2}j_{/O}\dot{\varphi}^2 \Longrightarrow \boldsymbol{T_M = \frac{1}{4}M\,R^2\dot{\theta}^2}$

L'énergie potentielle **du système** : $U = U_{kA} + U_{kB} = \frac{1}{2}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{R\theta})^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}(\frac{L}{2}\sin\theta)^2$

- **La fonction de dissipation** : $D = \frac{1}{2}\alpha(\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta)^2$
- **La fonction de Lagrange :** $L = T - U \Longrightarrow \boldsymbol{L = \frac{1}{4}M\,R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(R\theta)^2 - \frac{1}{2}k(\frac{L}{2}\sin\theta)^2}$

L'équation de Lagrange s'écrit : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{1}{2}M\,R^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -k(R^2 + \frac{L^2}{4})\theta \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha\frac{L^2}{4}\dot{\theta} \end{cases} \qquad \frac{1}{2}M\,R^2\ddot{\theta} + \alpha\frac{L^2}{4}\dot{\theta} + k(R^2 + \frac{L^2}{4})\theta = 0$$

C'est l'équation différentielle du mouvement libre amorti.

2. La pulsation propre du système $\boldsymbol{\omega_0}$ et le facteur d'amortissement $\boldsymbol{\delta}$

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} + \frac{\alpha L^2}{4}\dot{\theta} + k(R^2 + \frac{L^2}{4})\theta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{\alpha L^2}{2MR^2}\dot{\theta} + \frac{k(4R^2+L^2)}{2MR^2}\theta = 0 \\ \ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \end{cases}$$

$$2\delta = \frac{\alpha L^2}{2MR^2} \rightarrow \delta = \frac{\alpha L^2}{4MR^2} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{k(4R^2+L^2)}{2MR^2} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k(4R^2+L^2)}{2MR^2}}$$

La pulsation des oscillations amorties $\boldsymbol{\omega_a}$: $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{(\frac{k(4R^2+L^2)}{2MR^2}) - (\frac{\alpha L^2}{4MR^2})^2}$

3. La solution de l'équation différentielle dans le cas d'un système faiblement amorti.

$$\delta < \omega_0 : \theta(t) = C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi) \Longrightarrow \theta(t) = C\,e^{-(\frac{\alpha L^2}{4MR^2})t}\sin\left(\sqrt{(\frac{k(4R^2+L^2)}{2MR^2}) - (\frac{\alpha L^2}{4MR^2})^2}\;t + \varphi\right)$$

Université Ferhat Abbas – Sétif
Faculté de technologie
Tronc Commun S.T.

2ème Année LMD
07 Avril 2011
Temps alloué : 1h30

Contrôle de rattrapage de Physique 3

Exercice 01 (06 points)

Supposant que le système de la figure **01** effectue des oscillations de faibles amplitudes.

1. Quelle est le nombre de degrés de liberté ?
2. Calculer le Lagrangien du système.
3. Etablir l'équation différentielle du mouvement en fonction de **δ** et $\boldsymbol{\omega_0}$ et déduire $\boldsymbol{\omega_a}$.
4. Pour $\boldsymbol{\delta<\omega_0}$, Trouver la solution de l'équation différentielle du mouvement. aux conditions initiales $\boldsymbol{x(0)=x_0, \dot{x}(0)=0}$

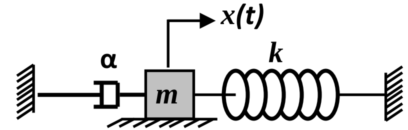


Figure 01

Exercice N°02 (06 points)

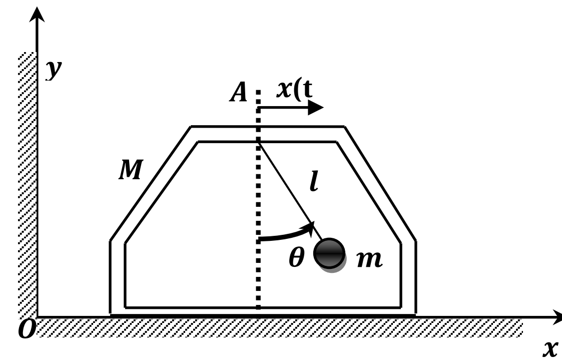
Un système électrique constitué d'une bobine **L**, d'une résistance **R** et d'une capacité **C** placés en série.

1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
2. Quelle est la nature du mouvement ?
3. Si $\boldsymbol{R=\sqrt{\frac{L}{C}}}$, quel est le type d'amortissement ?
4. Donner la solution de l'équation différentielle et la pulsation du mouvement.
5. Que représente le Décrément Logarithmique. Donner son expression.

Exercice 03 (08 points)

Le système de la figure 03 est constitué d'une masse **M** qui glisse sans frottement sur un plan horizontal et d'un pendule ($\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{l}$) suspendu au point A. Ce pendule oscille sans frottement dans le plan ***xoy.***
On choisit les coordonnées généralisées $\boldsymbol{x}$ (position de la masse **M**) et $\boldsymbol{\theta}$ (angle que fait le pendule avec la verticale).

1. Ecrire le Lagrangien du système.
2. Montrer que les équations du mouvement de ce système s'écrivent sous la forme :



$$\begin{cases} \dfrac{\ddot{x}}{l}+\dfrac{m}{m+M}\left(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta\right)=0 \\ \ddot{\theta}+\dfrac{\ddot{x}}{l}\cos\theta+\dfrac{g}{l}\sin\theta=0 \end{cases}$$

Figure 02

3. Montrer que dans le cas des petites oscillations (θ<<**1)**, l'équation différentielle pour θ s'écrit sous la forme : $\boldsymbol{\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0}$.
4. Donnez la valeur de ω_0 en fonction de $\boldsymbol{g, l}$ *et* $\boldsymbol{M}$ *et* $\boldsymbol{m}$.
5. Etablir les solutions des équations différentielles du système, dans le cas : $\boldsymbol{x(0)=x_0, \theta(0)=\theta_0}$, $\boldsymbol{\dot{x}(0)=V_0}$ **et** $\boldsymbol{\dot{\theta}(0)=0}$.

Solution du Contrôle de rattrapage de Physique 3

<u>Exercice 01 :06Points</u>

1. Le nombre de degrés de liberté : **ddl=1** (0.25)
2. Le Lagrangien du système :

<u>Energie cinétique</u> $\boldsymbol{T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2}$ (0.5) , <u>Energie potentielle</u> :$\boldsymbol{U = \frac{1}{2}kx^2}$ (0.5)

<u>Fonction de dissipation</u> : $\boldsymbol{D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2}$ (0.5). <u>Le Lagrangien</u> : **L =T-U=**$\boldsymbol{\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2}$ (0.25)

3. L'équation différentielle du mouvement : L'équation de Lagrange dans le cas d'un système libre amorti :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}},\ \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \boldsymbol{m\ddot{x}} \ (0.25) \\ \frac{\partial L}{\partial x} = \boldsymbol{-kx} \ (0.25),\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \boldsymbol{\alpha\dot{x}} \ (0.25) \end{cases} \Longrightarrow m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x}$$

L'équation différentielle s'écrit : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x} = 0$ (0.5)

$\Rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$; tel que : $\boldsymbol{2\delta = \frac{\alpha}{m}}$ (0.25) et $\boldsymbol{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$ (0.25) , $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}}$ (0.25)

4. Ecriture de la solution de l'équation différentielle du mouvement pour $\delta < \omega_0$ **:** *x(t)=C*$\boldsymbol{e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi)}$

On applique les conditions initiales pour calculer C et φ :

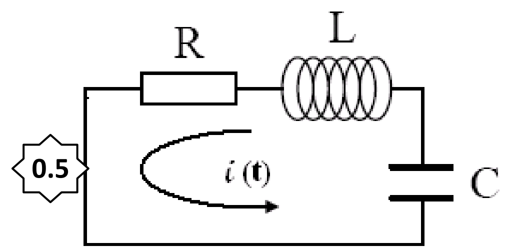
$x(0) = C\sin\varphi = x_0 \Rightarrow \mathbf{C} = \boldsymbol{\frac{x_0}{\sin\varphi}}$ (0.5)

$x(t) = C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi) \Rightarrow \dot{x}(t) = -C\delta\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi) + C\,\omega_a e^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \varphi)$ (0.5)

$\dot{x}(0) = -C\delta\sin\varphi + C\omega_a\cos\varphi = 0 \Rightarrow \mathbf{tg}(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\frac{\omega_a}{\delta}}$ (0.5)

D'où : $\boldsymbol{x(t) = \frac{x_0}{\sin\varphi}\, e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi)}$ (0.5)

<u>Exercice 02 : 06Points</u>



1- Equation différentielle du mouvement

Selon la loi de Kirchhoff : $V_R + V_L + V_C = 0$ (0.5)

$$R.I(t) + L.\frac{dI(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0 \quad \textbf{......(1)}$$

La dérivation de (1) donne : $R.\frac{dI(t)}{dt} + L.\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{dq(t)}{dt} = 0$ (0.5)

$I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$,ce qui donne: $L.\frac{d^2I(t)}{dt^2} + R.\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}I(t) = 0$ Ou bien: $\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}.\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC}I(t) = 0$ (0.5) **(2)**

2- C'est une équation du deuxième ordre représentant un mouvement vibratoire libre amortie d'un système à un seul degré de liberté. (0.5)

Les paramètres caractéristiques du mouvement sont :

Le facteur d'amortissement : $\delta = \frac{R}{2L}$ (0.5)**,** la pulsation propre du système : $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (0.5)

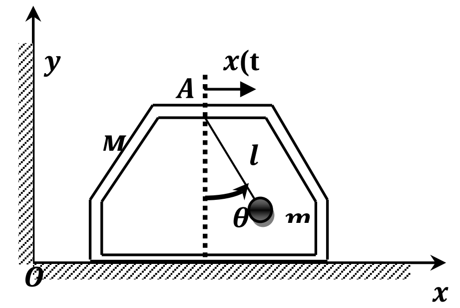
3- Si $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Le type d'amortissement, la solution de l'équation différentielle et la pulsation du mouvement.

Si $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$, $\delta = \frac{R}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{LC}} < \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_o$ (0.5)

- On a donc $\delta < \omega_0$: Ce qui correspond à un mouvement **<u>faiblement amorti</u>** (0.5)
- La forme de la solution est de la forme : $I(t) = C.e^{-\delta t}.\sin(w_a t + \varphi)$ (0.5)

  Avec : $\omega_a = \sqrt{\omega_o^2 - \delta_o^2}$ (0.5)

4- Le décrément logarithmique représente la vitesse du décroissement de l'amplitude dans le mouvement libre amorti. (0.5)



Exercice 03 : 08Points

1. Le Lagrangien du système :

La masse M : $x(t) \rightarrow \dot{x}(t)$

Le pendule (m, l) : $\begin{cases} x + l\sin\theta \\ -l\cos\theta \end{cases} \Rightarrow v_m^2 = \dot{x} + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2$

L'énergie cinétique du système : $T = T_M + Tm$

$\boldsymbol{T_M = \frac{1}{2}M\dot{x}^2}$ 0.25 , $\boldsymbol{Tm = \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\right)^2}$ 0.25

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2)^2$$

L'énergie potentielle du système : $\boldsymbol{U = U_m = mgl(1 - \cos\theta)}$ 0.5

- Le Lagrangien: $\boldsymbol{L = T - U = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2)^2 - mgl(1 - \cos\theta)}$

2. On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrit le mouvement donc on aura deux équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x}\, ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta \;\; 0.25 \;,\; \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \;\; 0.25 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\ddot{x}l\cos\theta - m\dot{x}l\dot{\theta}sin\theta + ml^2\ddot{\theta} \;\; 0.25 \;,\; \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -m\dot{x}l\dot{\theta}sin\theta - mgl\sin\theta \;\; 0.25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \;\ldots\ldots.. (1) \;\; 0.5 \\ m\ddot{x}l\cos\theta + ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0.\ldots\ldots\ldots\ldots... (2) \;\; 0.5 \end{cases}$$

On divise l'équation (1) sur $(M+m)l$: $\frac{\ddot{x}}{l} + \frac{m}{M+m}\left(\ddot{\theta}cos\theta - \dot{\theta}^2 sin\theta\right) = 0$

On divise l'équation (2) sur ml^2 : $\ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l}cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

- Donc : $\begin{cases} \frac{\ddot{x}}{l} + \frac{m}{M+m}\left(\ddot{\theta}cos\theta - \dot{\theta}^2 sin\theta\right) = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l}cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \end{cases}$

3. Dans le cas des petites oscillations (θ<<1) $\begin{cases} cos\theta \approx 1 \\ sin\theta \approx \theta \\ \dot{\theta}^2 sin\theta \approx \dot{\theta}^2\theta \approx 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\ddot{x}}{l} + \frac{m}{M+m}\ddot{\theta} = 0 \ldots\ldots (3) \;\; 0.5 \\ \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l} + \frac{g}{l}\theta = 0 \ldots. (4) \;\; 0.5 \end{cases}$

(3) – (4) → $\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g(M+m)}{Ml}\theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$ 0.5

4. La valeur de ω_0 en fonction de g, l et M et m : Par comparaison, on trouve : $\boldsymbol{\omega_0^2 = \frac{g(M+m)}{Ml}}$ 0.5

5. Les solutions des équations différentielles du système :

Ecriture de $\theta(t)$: $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$ 0.25

Ecriture de $x(t)$: **(3)** $\Rightarrow \ddot{x} = \frac{-ml}{M+m}\ddot{\theta} = -\frac{ml}{M+m}[-\omega_0^2\theta] = \left(\frac{ml\omega_0^2}{M+m}\right)\theta(t) = \frac{ml\omega_0^2}{M+m}[A\cos(\omega_0 t + \varphi)]$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{ml\omega_0}{M+m}[A\sin(\omega_0 t + \varphi)] + B \Rightarrow \boldsymbol{x(t) = -\frac{-ml}{M+m}A\cos(\omega_0 t + \varphi) + Bt + C}$**……..(5)** 0.25

Calcul des coefficients A et φ :

$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A\cos\varphi = \theta_0 \\ -A\omega_0\sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\varphi = 0} \;\; 0.25 \\ \boldsymbol{A = \theta_0} \;\; 0.25 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$

Calcul des coefficients B et C :

$\begin{cases} \varphi = 0 \\ A = \theta_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = -\frac{-ml}{M+m}\theta_0\cos(\omega_0 t) + Bt + C \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{ml\theta_0}{M+m}\omega_0\sin(\omega_0 t) + B$

$\boldsymbol{\dot{x}(0) = V_0} \Rightarrow \frac{ml\theta_0}{M+m}\omega_0\sin(0) + B = V_0 \Rightarrow \boldsymbol{B = V_0}$ 0.25

$\boldsymbol{x(0) = x_0} \Rightarrow -\frac{ml\theta_0}{M+m} + C = x_0 \Rightarrow \boldsymbol{C = x_0 + \frac{ml\theta_0}{M+m}}$ 0.25

(5)$\Rightarrow$ $x(t) = -\frac{-ml}{M+m}\theta_0\cos(\omega_0 t) + V_0 t + x_0 + \frac{ml\theta_0}{M+m}$

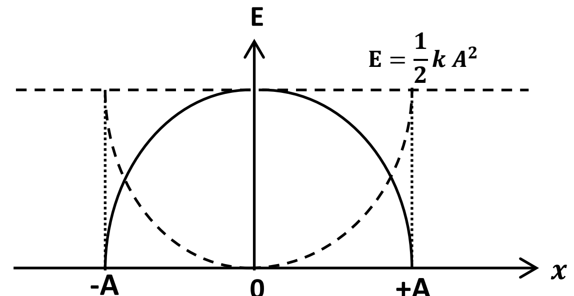
Donc la solution générale est $\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{ml}{M+m}\theta_0(1 - \cos(\omega_0 t)} \\ \boldsymbol{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)} \end{cases}$

Université Ferhat Abbas – Sétif | *Faculté de technologie* | *Tronc Commun S.T*

Examen de Physique 3

2ème Année LMD | *25 Février 2012* | *Temps alloué : 1h30*

Exercice 1 : Questions de cours (05 points)



Donnez la bonne réponse :

1- Dans la courbe ci contre, on trace l'énergie totale en fonction du déplacement x, pour un système libre non amorti (masse-ressort):
   - a- L'énergie cinétique diminue en s'approchant de **0**.
   - b- L'énergie potentielle diminue en s'approchant de **0**.
   - c- L'énergie cinétique augmente en s'approchant de $\pm A$.
   - d- L'énergie potentielle augmente en s'approchant de $\pm A$.

2- Pour un système amorti, la pulsation correspondante est ω_0, ω_a *ou* ω ?

3- On calcule le décrément logarithmique dans le cas d'un système : fortement amorti, faiblement amorti ou critique ?

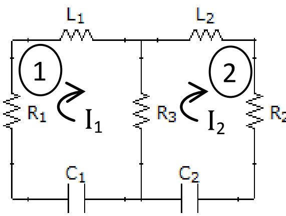
4- Pour un amortissement critique, le système oscillant revient à l'équilibre lentement, rapidement ou jamais ?

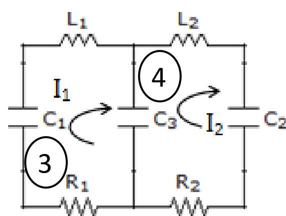
5- Pour un système non amorti, l'amplitude à la résonance est infinie, maximale ou nulle ?

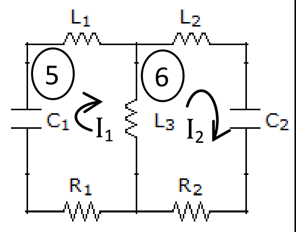
6- Pour un système amorti, l'amplitude à la résonance, est infinie, maximale ou nulle ?

7- Faites associer les équations suivantes avec les mailles correspondantes :

$$\begin{cases} L_1\ddot{q}_1 + (R_1+R_3)\dot{q}_1 + \frac{1}{C_1}q_1 = R_3\dot{q}_2 \\ L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_3}\right)q_1 = \frac{1}{C_3}q_2 \\ (L_1+L_3)\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \frac{1}{C_1}q_1 = L_3\ddot{q}_2 \\ L_2\ddot{q}_2 + (R_2+R_3)\dot{q}_2 + \frac{1}{C_2}q_2 = R_3\dot{q}_1 \\ L_2\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)q_2 = \frac{1}{C_3}q_1 \\ (L_2+L_3)\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 + \frac{1}{C_2}q_2 = L_3\ddot{q}_1 \end{cases}$$

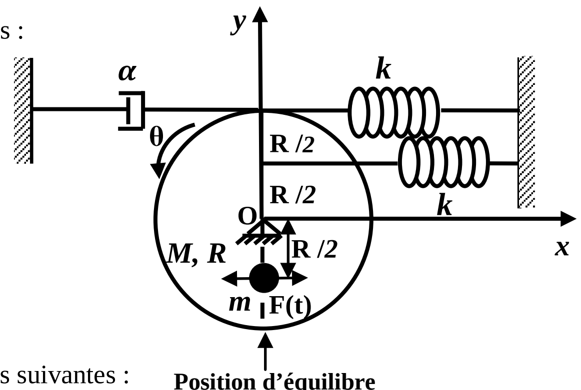






Exercice 2(08 points)

Un système constitué d'un disque circulaire, homogène, de masse **M** et de rayon **R**, peut osciller sans frottement autour de son axe horizontal **O**. Ce disque est relié à un bâti par deux ressorts de raideur k, à une distance **R** et **R/2** successivement et d'un amortisseur de coefficient α. Une masse m est fixée au disque à une distance **R/2** de **O** et fait un mouvement circulaire avec le mouvement du disque. Cette masse est soumise à une force ***F(t)*** sinusoïdale, d'amplitude F_0 et de pulsation ω, tel que $F(t) = F_0 sin\omega t$. En considérant les oscillations de faibles amplitudes :



1- Déterminer le Lagrangien du système en fonction de θ.

2- Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

3- Calculer l'expression de l'amplitude $A(\omega)$ et la phase $\phi(\omega)$. On donne $(j_{/O} = \frac{1}{2}MR^2)$

Exercices 03 (07Points)

Les équations de mouvement d'un système à deux degrés de liberté sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k & -2k \\ -2k & 2k \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions sinusoïdales.

- Donnez la solution des équations différentielles du mouvement.

On donne les conditions d'équilibres suivantes : $x_1(0) = x_0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$ et $\dot{x}_2(0) = 0$.

Bon courage

Solution de l'Examen de Physique 3

Exercice 1 : Questions de cours (05 points)

E

$E = \frac{1}{2}k\,A^2$

U

T

0.5

-A 0 +A x

Donnez la bonne réponse :

1. Dans la courbe ci contre, on trace l'énergie totale en fonction du déplacement x, pour un système libre non amorti (masse-ressort):

L'énergie potentielle diminue en s'approchant de **0** 0.25

L'énergie potentielle augmente en s'approchant de $\pm A$. 0.25

2. Pour un système amorti, la pulsation correspondante est ω_a 0. 5

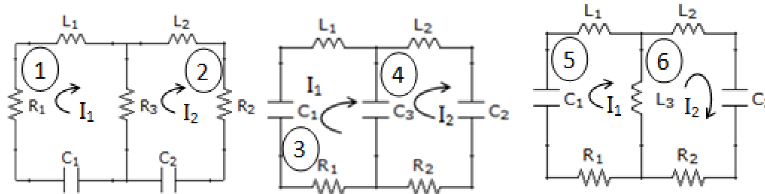
3. On calcule le décrément logarithmique dans le cas d'un système faiblement amorti. 0. 5

   Pour un amortissement critique, le système oscillant revient à l'équilibre rapidement 0. 5

4. Pour un système non amorti, l'amplitude à la résonance est infinie. 0. 5

5. Pour un système amorti, l'amplitude à la résonance maximale. 0. 5

6. On associe les équations suivantes avec les mailles correspondant :



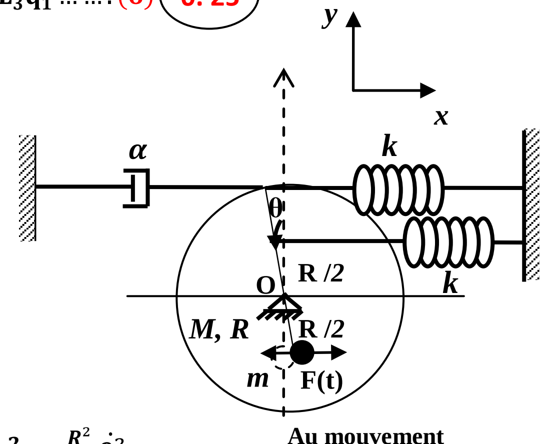
$$\begin{cases} L_1\ddot{q}_1 + (R_1 + R_3)\dot{q}_1 + \frac{1}{C_1}q_1 = R_3\dot{q}_2 \;\ldots\ldots(1) & 0.25 \\ L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right)q_1 = \frac{1}{C_3}q_2 \;\ldots\ldots(3) & 0.25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (L_1 + L_3)\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \frac{1}{C_1}q_1 = L_3\ddot{q}_2 \;\ldots\ldots(5) & 0.25 \\ L_2\ddot{q}_2 + (R_2 + R_3)\dot{q}_2 + \frac{1}{C_2}q_2 = R_3\dot{q}_1 \;\ldots\ldots(2) & 0.25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_2\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)q_2 = \frac{1}{C_3}q_1 \;\ldots\ldots(4) & 0.25 \\ (L_2 + L_3)\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 + \frac{1}{C_2}q_2 = L_3\ddot{q}_1 \;\ldots\ldots(6) & 0.25 \end{cases}$$

Exercice 2(08 points)

1. **Le Lagrangien du système en fonction de θ.**



- **Les coordonnées des éléments du système** :

❖ Le disque M effectue un mouvement de rotation autour de O donc: **Le déplacement de M :** $R\theta \rightarrow v_M^2 = R^2\dot{\theta}^2$

❖ La masse m se trouve à une distance $\frac{R}{2}$ de O et effectue un mouvement circulaire, donc :

Les coordonnées de m **:**
$$\begin{cases} x_m = \frac{R}{2}\sin\theta \\ y_m = -\frac{R}{2}\cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_m = \frac{R}{2}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_m = \frac{R}{2}\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow v_m^2 = \frac{R^2}{4}\dot{\theta}^2$$

❖ Le premier ressort est lié au disque en un point du contour et se déplace suivant (Ox) :
Donc : $x_k = R\theta$

❖ Le deuxième ressort est lié au disque en un point à une distance $\frac{R}{2}$ de **O** et se déplace suivant (Ox) :

Donc : $x_k = \frac{R}{2}\sin\theta$.

❖ L'amortisseur est lié au disque en un point du contour et se déplace suivant (Ox) :
Donc : $x_\alpha = R\theta \rightarrow \dot{x}_\alpha = R\dot{\theta}$

Solution de l'Examen de Physique 3(Suite)

- **L'énergie cinétique du système** : $T = T_M + T_m$
  - L'énergie cinétique de la masse M : $T_M = \frac{1}{2} j_{/O}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}\boldsymbol{MR^2\dot{\theta}^2}$
  - L'énergie cinétique de la masse m : $\boldsymbol{T_m = \frac{1}{2}m\frac{R^2}{4}\dot{\theta}^2}$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + \frac{m}{4}\right)R^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}\left(\frac{2M+m}{4}\right)R^2\dot{\theta}^2$$ 1pt

- **L'énergie potentielle du système** : $U_{Totale} = U_k + U_k + U_m \quad (U_m \neq 0)$
  On choisi l'axe (Ox) comme origine des énergies potentielles $(U(0) = 0)$
  - $U_k = \frac{1}{2}k\,{x_k}^2 = \frac{1}{2}k\,(R\theta)^2$
  - $U_k = \frac{1}{2}k\,{x_k}^2 = \frac{1}{2}k\,(\frac{R}{2}sin\theta)^2$
  - $U_m = mgh$ (h est la hauteur de m par rapport à un plan de référence choisi) donc :
  $\boldsymbol{U_m = -mg\frac{R}{2}cos\theta}$ (le signe (-) vient du fait que la masse m est au dessous du plan choisi)

Donc : $\boldsymbol{U_{Totale}} = \frac{1}{2}k\,(R\theta)^2 + \frac{1}{2}k\,(\frac{R}{2}sin\theta)^2 - mg\frac{R}{2}cos\theta$ 1. 5

- **La fonction de dissipation:** $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2_\alpha = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$ 0. 5
- La fonction de Lagrange : $L = T - U$
  - $L = \frac{1}{2}\left(\frac{2M+m}{4}\right)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k\,(R\theta)^2 - \frac{1}{2}k\,(\frac{R}{2}sin\theta)^2 + mg\frac{R}{2}cos\theta$ 0. 5

2. **L'équation différentielle du mouvement :**

- L'équation de Lagrange dans le cas d'une coordonnée généralisée θ et dans le cas d'un système forcé :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} + \left|\frac{\partial r}{\partial\theta}\right|.F_{ext}\ ;\ \begin{cases} \left|\frac{\partial r}{\partial\theta}\right|.F_{ext}: est\ le\ moment\ de\ la\ force \\ r : est\ la\ direction\ d'action\ de\ la\ force\ F(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \left(\frac{2M+m}{4}\right)R^2\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{2M+m}{4}\right)R^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial\theta} = -k\,R^2\theta - k\,\frac{R^2}{4}cos\theta sin\theta - mg\frac{R}{2}.sin\theta = -\left(k\,R^2 + k\,\frac{R^2}{4} + mg\frac{R}{2}\right)\theta; \quad cos\theta \approx 1, sin\theta \approx \theta \\ \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta} \\ r = \frac{R}{2}.sin\theta \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial\theta} = \frac{R}{2}cos\theta \approx \frac{R}{2} \end{cases}$$

Donc l'équation de Lagrange : $\left(\frac{2M+m}{4}\right)R^2\ddot{\theta} + \left(k\,R^2 + k\,\frac{R^2}{4} + mg\frac{R}{2}\right)\theta = -\alpha R^2\dot{\theta} + \frac{R}{2}F_0\,sin\omega t$

$$\Rightarrow \left(\frac{2M+m}{4}\right)R^2\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + \left(k\,R^2 + k\,\frac{R^2}{4} + mg\frac{R}{2}\right)\theta = \frac{R}{2}F_0 sin\omega t$$ 1 pt

$$\Rightarrow \left(\frac{2M+m}{4}\right)R\ddot{\theta} + \alpha R\dot{\theta} + \left(k\,R + k\,\frac{R}{4} + \frac{mg}{2}\right)\theta = \frac{F_0}{2}sin\omega t$$

On divise sur $\left(\frac{2M+m}{4}\right)R \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{4\alpha R}{(2M+m)R}\dot{\theta} + (\frac{5kR+2mg}{(2M+m)R})\theta = \frac{2F_0}{(2M+m)R}sin\omega t$

L'équation réduite est : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = Bsin\omega t$ 0. 5

tel que : $\delta = \frac{2\alpha R}{(2M+m)R}$, et $\omega_0^2 = \frac{5kR+2mg}{(2M+m)R}$, $B = \frac{2F_0}{(2M+m)R}$

3. **L'expression de l'amplitude $A(\omega)$ et la phase $\emptyset(\omega)$.**

La solution de l'équation différentielle du mouvement : $\theta(t) = \theta_H(t) + \theta_P(t)$
Dans le cas des faibles oscillations ($\delta < \omega_0$)

$$\theta_H(t) = C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi),$$ 0. 5

$$\theta_P(t) = A\,sin(\omega t + \emptyset) = A\,e^{j(\omega t + \emptyset)}$$ 0. 5

Solution de l'Examen de Physique 3(Suite)

Avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{5kR+2mg}{(2M+m)R} - \left(\frac{2\alpha R}{(2M+m)R}\right)^2}$

Après calcul on trouve :

$$A = \frac{B}{\sqrt{({\omega^2}_0-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}} \; tel\; que: B = \frac{2F_0}{(2M+m)R} \quad \text{1pt}$$

$$tg\emptyset = \frac{-2\delta\omega}{({\omega^2}_0 - \omega^2)} \quad \text{1pt}$$

Exercices 03 (07Points)

Les équations de mouvement d'un système à deux degrés de liberté sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k & -2k \\ -2k & 2k \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 - 2kx_2 = 0 \;\ldots\ldots \quad (1) \\ 2m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - 2kx_1 = 0 \;\ldots.(2) \end{cases}$$

- **Calcul des pulsations propres (valeurs propres) :**

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions sinusoïdales donc : $\begin{cases} x_1 = A_1 sin\,(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \\ x_2 = A_2 sin\,(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \end{cases}$ **0. 5**

On remplace dans (1) et (2)

$\begin{cases} (k - m\omega^2)x_1 - 2kx_2 = 0 \;\ldots\ldots\ldots(3) \\ -2kx_1 + 2(k - m\omega^2)x_2 = 0 \;\ldots.(4) \end{cases}$ **1 pt** $\Rightarrow \begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -2k \\ -2k & 2(k - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0$

$\left[\sqrt{2}(k - m\omega^2)\right]^2 - (2k)^2 = 0$ **1pt** $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}(k - m\omega^2) = 2k \\ ou \\ \sqrt{2}(k - m\omega^2) = -2k \end{cases}$

On remplace dans les équations (3) et (4), on trouve : $\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{k(\sqrt{2}+2)}{m\sqrt{2}} \\ \omega_2^2 = \frac{k(\sqrt{2}-2)}{m\sqrt{2}} \end{cases}$ **1pt**

- **Les modes propres :** On remplace dans (1) et (2) :

1er mode : $\omega^2 = \omega_1^2 = \frac{k(\sqrt{2}+2)}{m\sqrt{2}} \Rightarrow x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1$ **0.2 5** $\Rightarrow \vec{V}_1\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ **0. 25**

2ème mode : $\omega^2 = \omega_2^2 = \frac{k(\sqrt{2}-2)}{m\sqrt{2}} \Rightarrow x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1$ **0. 25** $\Rightarrow \vec{V}_2\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ **0.2 5**

- **La solution est générale est :**

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A\vec{V}_1 sin\,(\omega_1 t + \varphi_1) + B\vec{V}_2 sin\,(\omega_2 t + \varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = Asin\,(\omega_1 t + \varphi_1) + Bsin\,(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}Asin\,(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{\sqrt{2}}{2}Bsin\,(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad \text{1pt}$$

- Pour les conditions d'équilibres suivantes : $x_1(0) = x_0,\; x_2(0) = 0,\; \dot{x}_1(0) = 0$ **et** $\dot{x}_2(0) = 0.$

Donc :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A\omega_1 cos\,(\omega_1 t + \varphi_1) + B\omega_2 cos\,(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_1 Asin\,(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_2 Bsin\,(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

On remplace avec les conditions d'équilibres et on trouve :

$$\begin{cases} x_1(0) = Asin\,\varphi_1 + Bsin\,\varphi_2 = x_0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5) \\ x_2(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}Asin\,\varphi_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}Bsin\,\varphi_2 = 0 \;\ldots\ldots\ldots(6) \\ \dot{x}_1(t) = A\omega_1 cos\,\varphi_1 + B\omega_2 cos\,\varphi_2 = 0 \;\ldots\ldots\ldots(7) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}A\omega_1 cos\,\varphi_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}B\omega_2 cos\,\varphi_2 = 0 \;\ldots(8) \end{cases}$$

de(6): $-Asin\,\varphi_1 + Bsin\,\varphi_2 = 0$

de (8): $-A\omega_1 cos\,\varphi_1 + B\omega_2 cos\,\varphi_2 = 0$

$$x_1(0) = Asin\,\varphi_1 + Bsin\,\varphi_2 = x_0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$
$$x_2(0) = -Asin\,\varphi_1 + Bsin\,\varphi_2 = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (6)'$$
$$\dot{x}_1(t) = A\omega_1 cos\,\varphi_1 + B\omega_2 cos\,\varphi_2 = 0 \dots\dots\dots\dots (7)$$
$$\dot{x}_2(t) = -A\omega_1 cos\,\varphi_1 + B\omega_2 cos\,\varphi_2 = 0 \dots\dots\dots\dots (8)'$$

(5)+(6)': $2\,\boldsymbol{Bsin\,\varphi_2 = x_0}$

(5)-(6): $2\,\boldsymbol{Asin\,\varphi_1 = x_0}$

(7)+(8)': $2\,\boldsymbol{B\omega_2 cos\,\varphi_2 = 0}$

(7)-(8)' : $\boldsymbol{2A\omega_1 cos\,\varphi_1 = 0}$

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \\ A = B = \frac{x_0}{2} \end{cases}$$ **1pt**

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_1(t) = \frac{x_0}{2}\left[(sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + sin\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right)\right]} \\ \boldsymbol{x_2(t) = \frac{x_0}{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} sin\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right)\right]} \end{cases}$$ **0. 5**

Université Ferhat Abbas – Sétif
Faculté de technologie
Tronc Commun S.T

Examen Spécial de Physique 3

2ème Année LMD
15 Février 2012
Temps alloué : 1h30

Exercice1 : Questions de cours (05points)

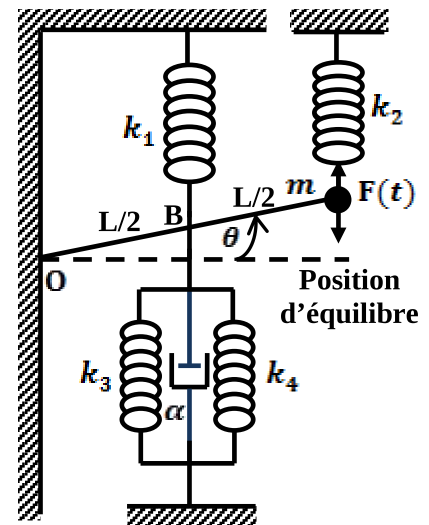
1. Répondez par oui ou non, la solution de l'équation différentielle du mouvement dans le cas d'un :
   a) système libre non amorti est : $x(t) = A\sin(\omega_a t + \varphi)$.
   b) système forcé non amorti est : $x(t) = C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \varphi)$.
   c) système libre amorti est : $x(t) = C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi)$.
   d) Système forcé amorti est : $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$
2. On calcul le décrément logarithmique quand la solution de l'équation différentielle du mouvement est :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-\delta t}[D_1 e^{\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t}],\ \alpha = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \\ x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \\ x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\delta t} \\ x(t) = C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi) \end{cases}$$

3. Pour un amortissement fort, le système revient à l'équilibre lentement, rapidement ou ne revient jamais.
4. Pour un système non amorti, $\omega_0 = \omega_r$ à la résonance ?
5. Pour un système amorti, $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}$ à la résonance ?
6. Pour une harmonique $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, tel que : $\omega = \frac{2\pi}{T}$, **A** (Amplitude de l'oscillation), T correspond à : $\begin{cases} 2A \\ 4A \\ 6A \end{cases}$

Exercice 2 : (08points)

Un système mécanique est constitué d'une tige de masse négligeable et de longueur **L**, d'un ensemble de ressorts (k_1, k_2, k_3 *et* k_4) et d'un amortisseur α (Voir figure).
Une masse m est fixée à l'extrémité de la tige à une distance **L** de **O** et fait un mouvement circulaire avec le mouvement de la tige. Cette masse est soumise à une force **F(t)** sinusoïdale, d'amplitude F_0 et de pulsation ω, tel que $F(t) = F_0 \sin\omega t$. En considérant les oscillations de faibles amplitudes.



1- Déterminer le Lagrangien du système en fonction de θ.
2- Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
3- Calculer l'expression de l'amplitude $A(\omega)$ et la phase $\emptyset(\omega)$.

On donne : $k_1 = k,\ k_2 = k_3 = k_4 = \frac{K}{2}$.

Exercice 3 : (07points)

Les équations de mouvement d'un système à deux degrés de liberté sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{4}{3}m\,\ddot{\theta} + 4\alpha\dot{\theta} + 4k\theta = \alpha\dot{\emptyset} + k\emptyset \\ \frac{1}{2}m\ddot{\emptyset} + \alpha\dot{\emptyset} + 2k\emptyset = 4\alpha\dot{\theta} + 4k\theta \end{cases}$$

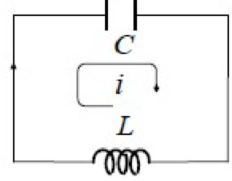
On fait l'hypothèse que le système admet des solutions sinusoïdales.

1. En négligeant l'amortissement, déterminer les pulsations propres du système et les modes d'oscillation.
2. Déduire la solution des équations différentielles du mouvement.

Examen de rattrapage de Physique 3

Exercice 1 (05 points)

Soit le circuit électrique ci-contre



1. Trouver à l'aide de la loi des mailles, l'équation différentielle que satisfait la charge q qui circule dans le circuit.
2. Trouver l'équation différentielle du courant i. Qu'est ce que vous remarquez ?
3. Déduire la pulsation propre de cet oscillateur harmonique.

التمرين01 (05 نقاط)

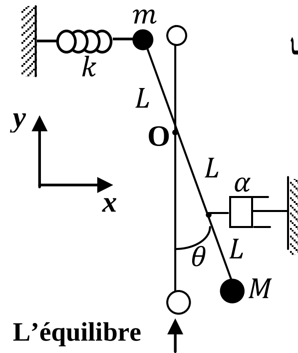
لتكن الدارة الكهربائية المبينة في الشكل المقابل

1. باستعمال قانون العروات اوجد المعادلة التفاضلية للدارة بدلالة الشحنة q .
2. اوجد المعادلة التفاضلية للدارة بدلالة شدة التيار i . ماذا تلاحظ ؟
3. استنتج النبض الذاتي لهذا الهزاز التوافقي .

Exercice 2 (07 points)

Une tige de longueur **3L** porte en ses extrémités des masses **M** et **m**. La tige peut tourner Autour d'un point **O**. L'ensemble des frottements est symbolisé par l'amortisseur de coefficient **α.** A l'équilibre le ressort était non déformé et la tige était verticale.

1. Trouver l'énergie cinétique **T**, l'énergie potentielle **U**, et la fonction de dissipation **D**.
2. Trouver le Lagrangien et l'équation du mouvement. Déduire $\boldsymbol{\delta}$ et $\boldsymbol{\omega_0}$.



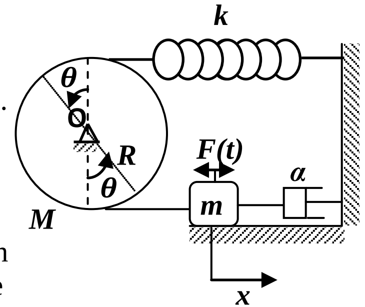
التمرين 02 (07 نقاط)

عارضة طولها 3L تحمل في نهايتيها كتلتين M و m يمكنها الدوران حول نقطة O جملة التخامد معبر عنها بمخمد معامله α . عند الاتزان النابض يكون غير مشوه و العارضة عمودية.

1. اوجد الطاقة الحركية T, الطاقة الكامنة U و دالة ضياع الطاقة D .
2. اوجد لاغرانجيان الجملة و المعادلة التفاضلية للحركة. استنتج δ و ω_0 .

Exercice 3 (08 points)

Dans le système ci-contre, un disque homogène de masse **M** et de rayon **R** peut tourner librement avec un angle $\boldsymbol{\theta}$ autour de son axe fixe. La masse **m** sur le plan horizontal est reliée à un amortisseur de coefficient **α** et au disque par un fil inextensible et non glissant. A l'équilibre le ressort était non déformé. Une excitation sinusoïdale $\mathbf{F(t) = F_0 \cos \Omega t}$ est appliquée sur la masse **m**.



1. Trouver la relation entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{\theta}$.
2. Trouver l'énergie cinétique **T**, l'énergie potentielle **U** et la fonction de dissipation **D** en fonction de la variable $\boldsymbol{x}$**.** Le moment d'inertie du disque autour de son axe est : $\boldsymbol{J/_O = \frac{1}{2}MR^2}$.
3. Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement.
4. En utilisant la représentation complexe, trouver l'amplitude **A** et la phase **Φ** de la solution permanente : $\boldsymbol{x(t) = A\cos(\Omega t + \Phi)}$.
5. Déduire la pulsation de résonance $\mathbf{\Omega_r}$ et donner le facteur de qualité **Q** du système faiblement amorti.

التمرين 03 (08 نقاط)

في النظام المبين في الشكل المقابل يمكن لقرص كتلته M و نصف قطره R الدوران حول محوره بزاوية θ.
نثبت كتلة m تتحرك على مستوى افقي و مربوطة بمخمد معامله α و بالقرص عن طريق خيط غير قابل للتمدد.
عند الاتزان يكون النابض غير مشوه. نطبق على الكتلة m قوة قسرية جيبية $\mathbf{F(t) = F_0 \cos \Omega t}$.

1. اوجد العلاقة بين x و θ.
2. اوجد الطاقة الحركية T , الطاقة الكامنة U و دالة ضياع الطاقة D بدلالة المتغير x . $(J/_O = \frac{1}{2}MR^2)$
3. اوجد لاغرانجيان الجملة و استنتج المعادلة التفاضلية القسرية.
4. باستعمال الكتابة العقدية, اوجد السعة A و الطور Φ للحل الدائم : $x(t) = A\cos(\Omega t + \Phi)$
5. استنتج النبض Ω_r عند الرنين و اوجد قيمة معامل الجودة Q للنظام في حالة التخامد الخفيف.

Exercice 1

Application de la loi des mailles à l'unique maille du circuit : $U_L + U_C = 0$ (*) 1

1. Puisque $U_c = \frac{q}{C}$ 0.5 et $U_L = L\frac{di}{dt} = L\ddot{q}$ 0.5

   L'équation (*) noud donne : $L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 \Longrightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$. 0.5

2. Puisque $i = \dot{q} = c\,\dot{U}_c$ 0.5 et $\dot{U}_L = L\frac{d^2i}{dt^2}$ 0.5

   L'équation (*) nous donne : $\dot{U}_L + \dot{U}_c = 0 \Longrightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{LC}i = 0$ 0.5

   On remarque la même forme des deux équations 0.5

3. La pulsation propre du système est $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ 0.5

Exercice 2

1. $T = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M(2L)^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(m+4M)L^2\dot{\theta}^2$ 1

0.5 $U = \frac{1}{2}kL^2sin^2\theta + mgLcos\,\theta - 2MgLcos\theta = \frac{1}{2}kL^2sin^2\theta + g(m-2M)Lcos\theta$

$D = \frac{1}{2}\alpha(L\dot{\theta})^2$ 1 ↖ 1 ↖ 1

2. Le Lagrangien est $L = T - U = \frac{1}{2}(m+4M)L^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kL^2sin^2\theta - g(m-2M)Lcos\theta$ 0.5

   L'équation du mouvement : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}$

   $\Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{(m+4M)}\dot{\theta} + \left(\frac{kL^2 - g(m-2M)L}{(m+4M)L^2}\right)\theta = 0$ 0.5

   L'équation est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ 0.5

   $avec: \delta = \frac{\alpha}{2(m+4M)}$ 0.5 $\omega_0^2 = \frac{kL^2 - g(m-2M)L}{(m+4M)L^2}$ 0.5

Exercice 3

1. $x = R\theta$ 0.5
2. $T = T_M + T_m = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}M + m)\dot{x}^2$ Car : $x = R\theta$ ↖ 0.5

   $U = U_k = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 = \frac{1}{2}kx^2$ 0.5

   $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$. 0.5

3. Le Lagrangien est $L = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

0.5 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{x}} + F \Longrightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{(m+\frac{M}{2})}\dot{x} + \frac{k}{(m+\frac{M}{2})}x = -\frac{F}{(m+\frac{M}{2})}$ 0.5

   L'équation est de la forme : $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{(m+\frac{M}{2})}$ avec:

   0.25 $\delta = \frac{\alpha}{2(m+\frac{M}{2})}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{(m+\frac{M}{2})}$ 0.25

4. En utilisant la représentation complexe:
5. $\begin{cases} F = F_0\cos\Omega t \rightarrow F = F_0 e^{j\Omega t} \\ x(t) = A\cos(\Omega t + \Phi) \longrightarrow \mathfrak{z}(t) = A\,e^{j(\Omega t + \Phi)} \end{cases}$ 0.5

.

$\ddot{\mathfrak{z}} + 2\delta\,\dot{\mathfrak{z}} + \omega^2{}_0\mathfrak{z} = \frac{F_0}{m}e^{j\Omega t} = Be^{j\Omega t} \Longrightarrow \left[(\omega^2{}_0 - \Omega^2) + 2\delta\Omega j\right]Ae^{j\Phi} = B$ 0.5

$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{B}}{\sqrt{(\boldsymbol{\omega^2{}_0 - \Omega^2})^2 + (\boldsymbol{2\delta\Omega})^2}}$ 1 et $\boldsymbol{tg\varphi} = \frac{-\boldsymbol{2\delta\Omega}}{(\boldsymbol{\omega^2{}_0 - \Omega^2})}$ 1

6. La pulsation de résonance est : Ω_r telle que $\frac{\partial A}{\partial\Omega} = 0$ soit $\Omega_r = \sqrt{(\omega_0^2 - 2\delta^2)}$ ↖ 0.5 ↖ 0.5

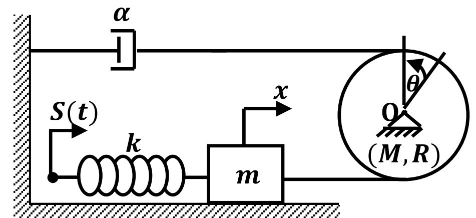
Le facteur de qualité : $Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$ 0.5

Examen du module Physique3

Exercice 1 : Questions de cours (05 points)
Répondez par **Oui « vrai »** ou **Non « faux » :**

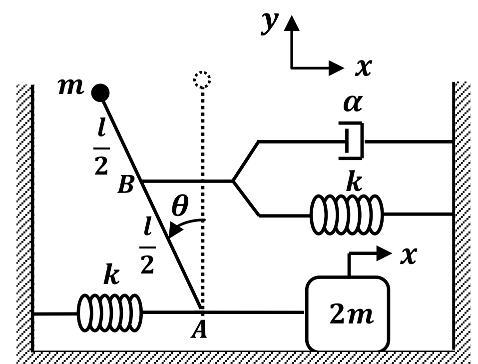
1. Une onde est une vibration qui se propage en fonction du temps et d'une variable d'espace.
2. Une onde mécanique se propage dans le vide.
3. Si la perturbation du milieu matériel est perpendiculaire à la direction de sa propagation l'onde est dite longitudinale.
4. La propagation d'une onde depuis une source quelconque est une onde unidimensionnelle.
5. Une onde est dite progressive si son amplitude augmente avec le temps.
6. L'onde sonore est une onde qui nécessite un milieu matériel pour se propager.
7. Une onde stationnaire se propage à une amplitude constante.
8. L'équation d'onde à une dimension est : $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$; tel que **V** est la vitesse de propagation.
9. La fonction d'onde $f(t+\frac{r}{V})$; correspond à la propagation des ondes incidentes.
10. La fonction d'onde $\varphi(t-\frac{r}{V})$; correspond à la propagation des ondes réfléchies.

Exercice 2: (07 points)
Un système constitué d'un disque homogène oscillant autour de son axe fixe **O**, est relié à un bâti par un amortisseur de coefficient α.
Une masse m est fixée d'une part au disque et fait un mouvement oscillatoire avec son mouvement et d'autre part à un ressort de raideur k.
L'extrémité libre du ressort est soumise à un déplacement excitateur sinusoïdal $S(t) = S_0 \cos \Omega t$.
En considérant les oscillations de faibles amplitudes:



1. Déterminer le Lagrangien du système en fonction de **θ**.
   On donne $J/_0 = \frac{1}{2}MR^2$
2. Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
3. Calculer l'expression de l'amplitude **A** et la phase φ de la solution particulière représentant le régime forcé.
4. Tracer la variation de l'amplitude **A** en fonction de $\frac{\Omega}{\omega_0}$ pour **3** valeurs différentes de **ξ**, on prend: $\xi = 0;\ 0,2$ et $0,4$. Commentez le schéma.

Exercice 3: (08 points)
Un système constitué d'une masse m fixée à l'extrémité d'une tige de masse négligeable et de longueur l. La tige effectue des oscillations de faibles amplitudes autour d'un axe passant par le point mobile **A**, une autre masse $2m$ et un ressort de raideur k sont attachés au point **A**. Un amortisseur de coefficient α et un autre ressort de raideur k sont fixés au point B (Voir figure).
En considérant les oscillations de faibles amplitudes:



1. Donner l'(les) équation(s) différentielle(s) du mouvement.
2. Donner la ou les solutions du système non amorti.
   On donne : $mgl = \frac{kl^2}{8}$

Bonne chance

Solution de l'examen du module Physique3 (2013-2014)

Exercice 1 : Questions de cours (05 points)

Répondre par **Oui** ou **Non:**

1. **Oui** (0.5) 2. **Non** (0.5) 3. **Non** (0.5) 4. **Non** (0.5) 5. **Non** (0.5)
6. **Oui** (0.5) 7. **Non** (0.5) 8. **Oui** (0.5) 9. **Non** (0.5) 10. **Non** (0.5)

Exercice 2 : (07 points)

1. Le Lagrangien du système en fonction de θ.

Nombre de degré de liberté 1 : $\boldsymbol{x = R\theta}$ (0.25)

Energie cinétique du système : $T = T_m + T_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J/_0\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\left(R\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2$

$$\boldsymbol{T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\dot{\theta}^2} \quad (0.25)$$

Energie potentielle du système : $\boldsymbol{U = \frac{1}{2}k(R\theta - S(t))^2}$ (0.5)

Fonction de dissipation : $\boldsymbol{D = \frac{1}{2}\alpha(R\dot{\theta})^2}$ (0.25)

Fonction de Lagrange : $\boldsymbol{L = T - U = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(R\theta - S(t))^2}$ (0.25)

Equation de Lagrange : $\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}}$ (0.25)

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\dot{\theta} \quad (0.25) \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\ddot{\theta} \quad (0.25) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -kR\left(R\theta - S(t)\right) \quad (0.25) \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta} \quad (0.25) \end{cases}$$

2. Equation différentielle du mouvement forcé amorti en fonction de θ :

L'équation différentielle s'écrit : $\left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\ddot{\theta} + kR\left(R\theta - S(t)\right) = -\alpha R^2\dot{\theta}$

$$\boldsymbol{\left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + kR^2\theta = KRS_0 \cos\Omega t}\text{.......(1)} \quad (0.25)$$

3. L'expression de l'amplitude A et la phase φ de la solution particulière représentant le régime forcé.

On peut écrire l'équation (1) comme suit :

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = B\cos\Omega t}\text{.........(2)} \quad (0.25) \qquad \textit{tels que}: 2\delta = \frac{2\alpha}{2m+M},\ \omega_0^2 = \frac{2k}{2m+M},\ B = \frac{2kS_0}{(2m+M)R}$$

La solution générale de l'équation (2) est : $\boldsymbol{\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t)}$ (0.25)

Pour $\boldsymbol{\delta < \omega_0}$ **:** $\boldsymbol{\theta_h(t) = Ce^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \phi)}$; $\boldsymbol{\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ (0.25)

$\boldsymbol{\theta_p(t) = A\cos(\Omega t + \emptyset)}$: (0.25) On calcul A et φ en utilisant la notation complexe : $\boldsymbol{\theta_p(t) = Ae^{j(\Omega t+\varphi)}}$, (0.25)

l'équation (2) devient : $\boldsymbol{\ddot{\theta}_p(t) + 2\delta\dot{\theta}_p(t) + \omega_0^2\theta_p(t) = B\,e^{j\Omega t}}$.........(3) (0.25)

$\dot{\theta}_p(t) = Aj\Omega e^{j(\Omega t+\varphi)}$, $\ddot{\theta}_p(t) = -A\Omega^2 e^{j(\Omega t+\varphi)}$, on remplace $\dot{\theta}_p(t), \ddot{\theta}_p(t)$ dans (3), on aura :

$$\boldsymbol{-A\Omega^{2e^{j(\Omega t+\varphi)}} + 2\delta Aj\Omega e^{j(\Omega t+\varphi)} + \omega_0^{2Ae^{j(\Omega t+\varphi)}} = B\,e^{j\Omega t}} \quad (0.25)$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow A\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + j(2\delta\Omega)\right] = Be^{-j\varphi} = B(\cos\varphi - j\sin\varphi)} \quad (0.25)$$

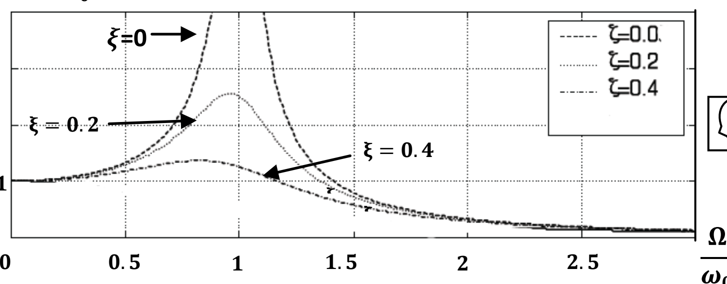
$$\begin{cases} \boldsymbol{A\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) = B\cos\varphi} \ldots\ldots(4) \\ \boldsymbol{A(2\delta\Omega) = -B\sin\varphi} \ldots\ldots\ldots(5) \end{cases} \quad (0.25) \qquad \Rightarrow A^2[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2] = B^2 \Rightarrow \boldsymbol{A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}}} \quad (0.25)$$

$$\frac{(5)}{(4)} = tg\varphi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = Arctg\left(-\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)} \quad (0.25)$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \theta_p(t) = \frac{B}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+(2\delta\Omega)^2}}\cos\left(\Omega t + Arctg\left(-\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)\right)} \quad (0.25)$$

4. La variation de l'amplitude A en fonction de $\boldsymbol{\frac{\Omega}{\omega_0}}$ pour 3 valeurs différentes de ξ, on prend:

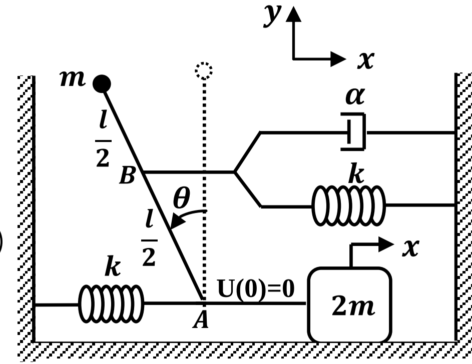
$\boldsymbol{\xi = 0, 0.2}$ et $\boldsymbol{0.4}$



(0.5)

Commentaires :

- (0.25) L'amplitude A **augmente quand le rapport d'amortissement ξ diminue**.
- (0.25) L'amplitude de vibration atteint un maximum quand $\boldsymbol{\Omega \approx \omega_0}$: on dit qu'il ya **résonance** .



<u>Exercice 3</u> : (08 points)

1. Les équations différentielles du mouvement : Le système est à **deux degrés**

Coordonnées généralisés :

$2m\begin{cases}x\\0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}\\0\end{cases}$ (0.25)

$m\begin{cases}x-l\sin\theta\\0+l\cos\theta\end{cases}$ (0.25) $\Rightarrow \begin{cases}\dot{x}-l\dot{\theta}\cos\theta\\-l\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}$ (0.25) $\Rightarrow v_m^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+l^2\dot{\theta}^2-2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right)$ (0.25)

$x_\alpha = x-\frac{l}{2}\sin\theta$ (0.25) $\rightarrow \dot{x}-\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta,$

$x_{KA}=x,$ (0.25) $x_{KB}=x-\frac{l}{2}\sin\theta$ (0.25)

Energie cinétique : $T=T_{2m}+T_m=\frac{1}{2}(2m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+l^2\dot{\theta}^2-2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right)$

$\cos\theta=1 \Rightarrow$ $\boldsymbol{T=m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}-l\dot{\theta}\right)^2}$ (0.25) **(Ou** $\boldsymbol{T=m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+l^2\dot{\theta}^2-2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right)}$**)**

Energie potentielle : $\boldsymbol{U=U_m+U_{KA}+U_{KB}=mgl\cos\theta+\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}k\left(x-\frac{l}{2}\sin\theta\right)^2}$ (0.25)

Fonction de dissipation : $\boldsymbol{D=\frac{1}{2}\alpha\left(\dot{x}-\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)^2}$ (0.25)

Fonction de Lagrange : $\boldsymbol{L=T-U=m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}-l\dot{\theta}\right)^2-mgl\cos\theta-\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}k\left(x-\frac{l}{2}\sin\theta\right)^2}$ (0.25)

Equations de Lagrange : $\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} & (0.25)\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} & (0.25)\end{cases}$

Et dans le cas des faibles oscillations, les angles sont très petits on a : $\begin{cases}\sin\theta\approx\theta\\ \cos\theta\approx 1\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=2m\dot{x}+m\left(\dot{x}-l\dot{\theta}\right) \ (0.25) \quad \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=2m\ddot{x}+m\left(\ddot{x}-l\ddot{\theta}\right)=3m\ddot{x}-ml\ddot{\theta} \ (0.25)\\ \frac{\partial L}{\partial x}=-kx-k\left(x-\frac{l}{2}\sin\theta\right) \ (0.25)\\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}}=\alpha\left(\dot{x}-\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right) \ (0.25)\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3m\ddot{x}-ml\ddot{\theta}+\alpha\left(\dot{x}-\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)+2kx-\frac{kl}{2}\theta=0 \Rightarrow \boldsymbol{3m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+2kx-ml\ddot{\theta}-\alpha\frac{l}{2}\dot{\theta}-\frac{kl}{2}\theta}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \ (0.25)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=-ml\left(\dot{x}-l\dot{\theta}\right)\rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=-ml\left(\ddot{x}-l\ddot{\theta}\right)\\ \frac{\partial L}{\partial \theta}=+mgl\sin\theta+\left(k\frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(x-\frac{l}{2}\sin\theta\right) \quad \Rightarrow \boldsymbol{ml^2\ddot{\theta}+\alpha\frac{l^2}{4}\dot{\theta}+\left(k\frac{l^2}{4}-mgl\right)\theta-ml\ddot{x}-\alpha\frac{l}{2}\dot{x}-k\frac{l}{2}x=0}\ \ldots\ldots\ldots(2) \ (0.25)\\ \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}=-\alpha\frac{l}{2}\cos\theta\left(\dot{x}-\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\end{cases}$$

Ecriture des solutions pour un système non amorti : $\boldsymbol{mgl=\frac{kl^2}{8}}$

$$\begin{cases}3m\ddot{x}+2kx-ml\ddot{\theta}-\frac{kl}{2}\theta=0\\ ml^2\ddot{\theta}+\left(k\frac{l^2}{4}-mgl\right)\theta-ml\ddot{x}-k\frac{l}{2}x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{3m\ddot{x}+2kx-ml\ddot{\theta}-\frac{kl}{2}\theta}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(3) \ (0.25)\\ \boldsymbol{ml^2\ddot{\theta}+k\frac{l^2}{8}\theta-ml\ddot{x}-k\frac{l}{2}x=0}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(4) \ (0.25)\end{cases}$$

a) **On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :** $\begin{cases}\boldsymbol{x(t)=A_1\sin(\omega t+\varphi)\Rightarrow\ddot{x}=-\omega^2x}\\ \boldsymbol{\theta(t)=A_2\sin(\omega t+\varphi')\Rightarrow\ddot{\theta}=-\omega^2\theta}\end{cases}$ (0.25)

On remplace dans les équations (3) et (4) donc :

$$\begin{cases}(2k-3m\omega^2)x+\left(ml\omega^2-\frac{kl}{2}\right)\theta=0\ \ldots\ldots\ldots(5)\\ \left(ml\omega^2-\frac{kl}{2}\right)x+\left(\frac{kl^2}{8}-ml\omega^2\right)\theta=0\ \ldots\ldots(6)\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}2k-3m\omega^2 & ml\omega^2-\frac{kl}{2}\\ ml\omega^2-\frac{kl}{2} & \frac{kl^2}{8}-ml\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \ (0.25)$$

$$(0.25)\ \begin{vmatrix}\boldsymbol{2k-3m\omega^2} & \boldsymbol{ml\omega^2-\frac{kl}{2}}\\ \boldsymbol{ml\omega^2-\frac{kl}{2}} & \boldsymbol{\frac{kl^2}{8}-ml\omega^2}\end{vmatrix}=0\Rightarrow(2k-3m\omega^2)\left(\frac{kl^2}{8}-ml^2\omega^2\right)-\left(ml\omega^2-\frac{kl}{2}\right)^2=0$$

$$\boldsymbol{\frac{k^2l^2}{4}-2kml^2\omega^2-\frac{3}{8}mkl^2\omega^2+3m^2l^2\omega^4-m^2l^2\omega^4-\frac{k^2l^2}{4}+mkl^2\omega^2=0\Rightarrow 2ml^2\omega^4-\frac{11}{8}kl^2\omega^2=0} \ (0.25)$$

$$\omega^2\left(2l^2m\omega^2-\frac{11}{8}kl^2\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{\omega_1^2=0} \ (0.25)\\ \boldsymbol{\omega_2^2=\frac{11}{16}\frac{k}{m}} \ (0.25)\end{cases}$$

b) **Calcul des modes propres :** 1[er] mode pour $\omega^2=\omega_1^2=0$, on aura : $2kx-\frac{kl}{2}\theta=0\Rightarrow\boldsymbol{\theta=\frac{4}{l}x}$ (0.25) $\Rightarrow\boldsymbol{\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix}1\\ \frac{4}{l}\end{pmatrix}}$ (0.25)

2[ème] mode pour $\omega^2=\omega_2^2=\frac{11}{16}\frac{k}{m}$ aura : $-\frac{k}{16}x+\frac{3kl}{16}\theta=0\Rightarrow\boldsymbol{\theta=\frac{x}{3l}}$ (0.25) $\Rightarrow\boldsymbol{\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{3l}\end{pmatrix}}$ (0.25)

Donc la solution est : $\Rightarrow$

$\begin{pmatrix}x\\ \theta\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\ \frac{4}{l}\end{pmatrix}\sin(\omega_1t+\varphi_1)+B\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{3l}\end{pmatrix}\sin(\omega_2t+\varphi_2)$ **Ou alors :** $\begin{cases}\boldsymbol{\varphi(t)=A\sin(\omega_1t+\varphi_1)+\ B\sin(\omega_2t+\varphi_2)}\\ \boldsymbol{\theta(t)=\frac{4}{l}A\sin(\omega_1t+\varphi_1)+\frac{B}{3l}\ \sin(\omega_2t+\varphi_2)}\end{cases}$ (0.25)

Université Sétif -1-
Faculté de technologie
Département des enseignements de base en technologie

2ème Année LMD
29 Janvier 2014
Temps alloué : 1h30

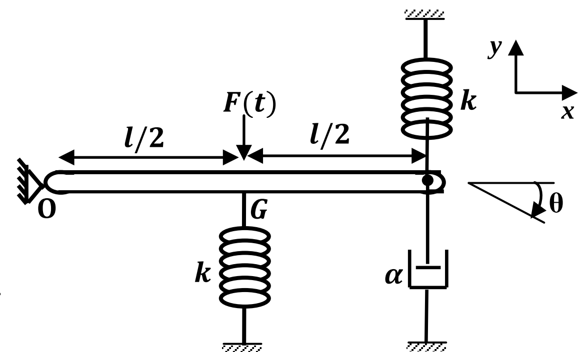
Examen de remplacement du module Physique3

Exercice 1 : Questions de cours (05 points)

Répondez par **« vrai »** ou **« faux » :**

1. Une onde peut se propager dans le vide en fonction du temps et d'une variable d'espace.
2. Une onde mécanique se propage dans un milieu liquide.
3. Si la perturbation du milieu matériel est perpendiculaire à la direction de sa propagation l'onde est dite incidente.
4. La propagation d'une onde depuis une source quelconque est une onde réfléchie.
5. Une onde est dite progressive si son amplitude augmente avec le temps.
6. Une onde stationnaire se propage à une amplitude égale à zéro.
7. L'onde nécessite un milieu gazeux pour se propager.
8. L'équation d'onde à une dimension est : $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = V^2 \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$; tel que **V** est la vitesse de propagation.
9. La fonction d'onde $f(\frac{r}{V} - t)$; correspond à la propagation des ondes incidentes.
10. La fonction d'onde $\varphi(\frac{r}{V} + t)$; correspond à la propagation des ondes réfléchies.

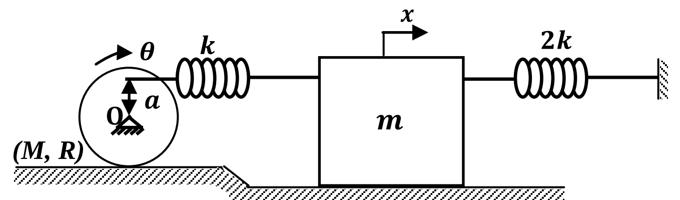
Exercice 2 : (07 points)



Un système mécanique est constitué d'une barre de masse M et de longueur l, oscillant autour du point fixe **O** et de **2** ressorts k attachés à la barre à une distance $\frac{l}{2}$ et l successivement.
un amortisseur de coefficient α est attaché à son tour à la barre à une distance l de **O**.
Le centre de la tige est soumis à une force sinusoïdale $\mathbf{F(t) = F_0 cos\, \omega t}$.
En considérant les oscillations de faibles amplitudes.

1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction de θ.
   On donne : $J/_G = \frac{1}{12} Ml^2$, **G** est le centre de gravité de la barre.
2. Calculer l'expression de l'amplitude **A** et la phase φ de la solution particulière représentant le régime forcé.
3. Donner la solution générale de l'équation différentielle du mouvement.
4. Tracer la variation de la phase φ en fonction de $\frac{\omega}{\omega_0}$ pour **3** valeurs différentes de ξ, Commentez le schéma.

Exercice 3 : (08 points)



Un système mécanique est composé de deux oscillateurs (M, R) et $(m, 2k)$ couplés par un ressort de raideur k se trouvant a une distance a du centre **O** du disque. (**Voir figure**).
En considérant les oscillations de faibles amplitudes.

1. Donner la ou les équations différentielles du mouvement.
2. Donner la ou les solutions des équations différentielles du mouvement. On donne : $J/_0 = \frac{1}{2} MR^2 = m, \quad a = 1$

Bonne chance

Solution de l'examen de remplacement

<u>Exercice 1</u> : Questions de cours

1. Non (0.5)	2. Oui (0.5)	3. Non (0.5)	4. Non (0.5)	5. Non (0.5)
6. Non (0.5)	7. Non (0.5)	8. Non (0.5)	9. Non (0.5)	10. Non (0.5)

<u>Exercice 2</u>

1. **Le Lagrangien du système en fonction de θ.**

Nombre de degré de liberté 1

<u>Energie cinétique</u> : $T = T_M = \frac{1}{2}J/_0\dot{\theta}^2$

On applique le théorème de Huygens

$$J/_0 = J/_G + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + M\frac{l^2}{4} = \frac{1}{3}Ml^2$$

Donc $\boldsymbol{T = T_M = \frac{1}{2}J/_0\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}Ml^2\dot{\theta}^2}$

<u>Energie potentielle</u> : $\boldsymbol{U = U_k + U_k = \frac{1}{2}k\left[\left(-\frac{l}{2}\sin\theta\right)^2 + (-l\sin\theta)^2\right] = \frac{1}{2}k\left(\frac{5}{4}l^2\right)\sin^2\theta}$

<u>Fonction de dissipation</u> :$\boldsymbol{y_\alpha = -l\sin\theta \Rightarrow \dot{y}_\alpha = -l\dot{\theta}\cos\theta \Rightarrow D = \frac{1}{2}\alpha(l\dot{\theta}\cos\theta)^2}$

<u>Fonction de Lagrange</u> : $\boldsymbol{L = T - U = \frac{1}{6}Ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{5}{4}l^2\right)\sin^2\theta}$

Equations de Lagrange dans le cas d'un système forcé amorti en fonction de $\boldsymbol{\theta}$: $\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} + \mathcal{M}(F)}$ **avec:** $\boldsymbol{\mathcal{M}(F) = F\frac{l}{2}}$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{1}{3}Ml^2\dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}Ml^2\ddot{\theta}} \\ \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\boldsymbol{k\left(\frac{5}{4}l^2\right)\sin\theta.\cos\theta} \\ \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = -\boldsymbol{\alpha(l^2\dot{\theta}\cos^2\theta)} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{1}{3}Ml^2\ddot{\theta} + \alpha l^2\dot{\theta} + \left(\frac{5}{4}kl^2\right)\theta = F\frac{l}{2}}$$

Avec pour les faibles oscillations, les angles sont très petits on a : $\begin{cases}\sin\theta \approx \theta \\ \cos\theta \approx 1\end{cases}$

Equation différentielle du mouvement forcé amorti en fonction de θ :

L'équation différentielle s'écrit : $\boldsymbol{\frac{1}{3}Ml^2\ddot{\theta} + \alpha l^2\dot{\theta} + \left(\frac{5}{4}kl^2\right)\theta = F\frac{l}{2} = F_0\frac{l}{2}\cos\omega t}$

On divise sur $\boldsymbol{\frac{1}{3}Ml^2}$ et on aura : $\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{M}\dot{\theta} + \left(\frac{15}{4}\frac{k}{M}\right)\theta = \frac{3F_0}{2Ml}\cos\omega t}$..........**(1)**

2. **L'expression de l'amplitude A et la phase φ de la solution particulière représentant le régime forcé.**

On peut écrire l'équation (1) comme suit :

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = B\cos\omega t}.........(2) \qquad tels\ que: 2\delta = \frac{3\alpha}{M},\ \omega_0^2 = \frac{15}{4}\frac{k}{M},\ B = \frac{3F_0}{2Ml}$$

La solution générale de l'équation (2) est : $\boldsymbol{\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t)}$

Pour $\boldsymbol{\delta < \omega_0}$ **:** $\boldsymbol{\theta_h(t) = Ce^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \phi)}$ **;** $\boldsymbol{\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$

$\boldsymbol{\theta_p(t) = A\cos(\omega t + \emptyset)}$: On calcul A et φ en utilisant la notation complexe : $\boldsymbol{\theta_p(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)}}$,

l'équation (2) devient : $\boldsymbol{\ddot{\theta}_p(t) + 2\delta\dot{\theta}_p(t) + \omega_0^2\theta_p(t) = B\,e^{j\omega t}}$.........(3)

$\dot{\theta}_p(t) = Aj\Omega e^{j(\Omega t+\varphi)}$, $\ddot{\theta}_p(t) = -A\Omega^2 e^{j(\Omega t+\varphi)}$, on remplace $\dot{\theta}_p(t), \ddot{\theta}_p(t)$ dans (3), on aura :

$$\boldsymbol{-A\omega^2 e^{j(\omega t+\varphi)} + 2\delta Aj\omega e^{j(\omega t+\varphi)} + \omega_0^2 Ae^{j(\omega t+\varphi)} = B\,e^{j\omega t}}$$

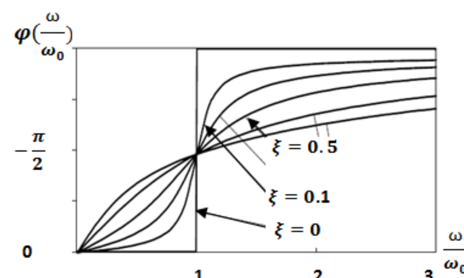
$$\boldsymbol{\Rightarrow A\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + j(2\delta\omega)\right] = Be^{-j\varphi} = B(\cos\varphi - j\sin\varphi)}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{A\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = B\cos\varphi} \dots\dots(4) \\ \boldsymbol{A(2\delta\omega) = -B\sin\varphi} \dots\dots\dots(5)\end{cases} \Rightarrow A^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2] = B^2 \Rightarrow \boldsymbol{A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}}$$

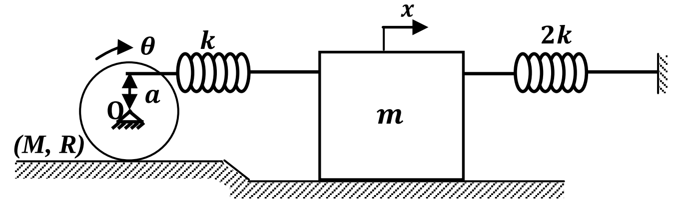
$$\frac{(5)}{(4)} = tg\varphi = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = Arctg\left(-\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \Rightarrow \theta_p(t) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}\cos\left(\omega t + Arctg\left(-\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right)}$$

3. La solution générale est : $\boldsymbol{\theta(t) = Ce^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \phi) + \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}}\cos\left(\omega t + Arctg\left(-\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right)}$

4. **La variation de** la phase $\boldsymbol{\varphi}$ **en fonction de** $\boldsymbol{\frac{\omega}{\omega_0}}$ **pour 3 valeurs différentes de ξ.**
   - L'oscillateur est en résonance de phase quand $\boldsymbol{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$ pour $\boldsymbol{\omega = \omega_0}$.
   - L'oscillateur est toujours en retard de phase et ce retard augmente lorsque la pulsation augmente.



Exercice 3 :



Le système est à **2** degrés de liberté :

$x_m = x_2 \Rightarrow \dot{x}_m = \dot{x}_2$

Le ressort horizontal $\boldsymbol{k}$ relis les deux oscillateurs donc $\{\boldsymbol{x_k = x - a\sin\theta}$

1. Equations différentielles du mouvement

Energie cinétique :$T = T_m + T_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J/_0\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2$

Energie potentielle : $U = U_k + U_{2k} = \frac{1}{2}k\,(x - a\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}(2k){x^2}_2$

La fonction de Lagrange: $L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k\,(x - a\sin\theta)^2 - kx^2$

Détermination des équations différentielles :

Les équations de Lagrange sont : $\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \end{cases}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}, \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -k(x - a\theta) - 2kx \Rightarrow m\ddot{x} + 3kx - ka\theta = 0 \ldots\ldots(1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\ddot{\theta}, \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = ka\cos\theta(x - a\sin\theta) = kax - ka^2\theta \Rightarrow m\ddot{\theta} + ka^2\theta - kax = 0 \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$a = 1 \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} + 3kx - k\theta = 0 \ldots\ldots(3) \\ m\ddot{\theta} + k\theta - kx = 0 \ldots\ldots(4) \end{cases}$$

a) **On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :** $\begin{cases} x(t) = A_1\sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \\ \theta(t) = A_2\sin(\omega t + \varphi') \Rightarrow \ddot{\theta} = -\omega^2\theta \end{cases}$

b) On remplace dans les équations (3) et (4) donc :

c) $\begin{cases} (3k - m\omega^2)x - k\theta = 0 \ldots\ldots\ldots(5) \\ -kx + (k - m\omega^2)\theta = 0 \ldots\ldots(6) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2 = 0$

On pose : $\omega^2 = x \Rightarrow k^2x^2 - 4kmx + 2k = 0$

$$\Delta = 8k^2m^2 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{(2 + \sqrt{2})k}{m} \\ \omega_2^2 = \frac{(2 - \sqrt{2})k}{m} \end{cases}$$

e) **Calcul des modes propres :**

1[er] mode pour $\omega^2 = \omega_1^2 = \frac{(2+\sqrt{2})k}{m}$, on aura : $(1 + \sqrt{2})kx - k\theta = 0 \Rightarrow \theta = (1 + \sqrt{2})x \Rightarrow \vec{V_1}\begin{pmatrix} 1 \\ (1 + \sqrt{2}) \end{pmatrix}$

2[ème] mode pour $\omega^2 = \omega_2^2 = \frac{(2-\sqrt{2})k}{m}$ aura : $(1 - (\sqrt{2})kx - k\theta = 0 \Rightarrow \theta = (1 - \sqrt{2})x \Rightarrow \vec{V_2}\begin{pmatrix} 1 \\ (1 - \sqrt{2}) \end{pmatrix}$

Donc la solution est : $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ (1 + \sqrt{2}) \end{pmatrix}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\begin{pmatrix} 1 \\ (1 - \sqrt{2}) \end{pmatrix}\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

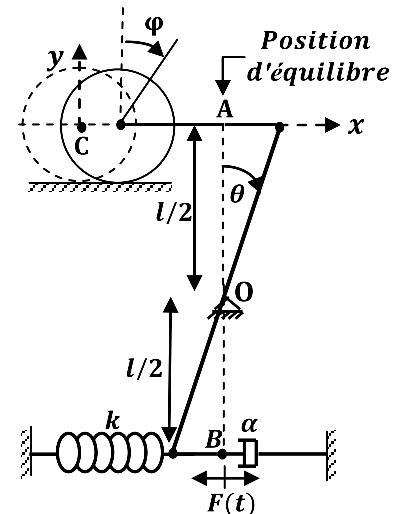
Ou alors :

$$\begin{cases} \varphi(t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta(t) = (1 + \sqrt{2})A\sin(\omega_1 t + \varphi_1)(1 - \sqrt{2})B\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Examen de rattrapage du module physique3

Exercice 1: (10 points)

Soit le système mécanique composé d'un disque homogène $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{R})$, qui peut tourner sans glisser sur un plan horizontal, d'une tige $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{l})$ qui peut osciller autour d'un axe fixe **O** perpendiculaire au plan du mouvement, d'un ressort $\boldsymbol{k}$ et d'un amortisseur $\boldsymbol{\alpha}$. La barre horizontale **CA** est de masse négligeable. Le système effectue des oscillations de faibles amplitudes.



a) <u>Système libre amorti :</u>

1. Calculer le Lagrangien du système en fonction de $\boldsymbol{\theta}$.

On donne : $J_{/C} = \frac{1}{2}MR^2 , J_{/O} = \frac{1}{12}ml^2$

2. Montrer que le Lagrangien **L** et la fonction de dissipation **D** peuvent s'écrire sous la forme :

   $L = \frac{1}{2}M_0 l^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}K_0 l^2\theta^2 + C^{te}$; $D = \frac{1}{2}\alpha_0 l^2\dot{\theta}^2$

3. Donner les expressions de M_0, K_0 et α_0. C^{te} : Constante

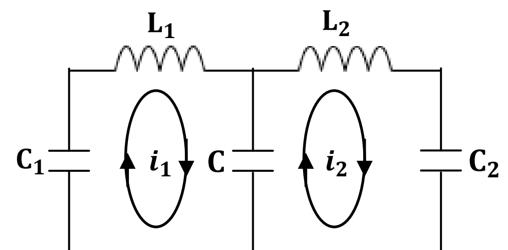
b) <u>Système forcé amorti :</u>

Le point B est soumis à une force extérieure $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement et déduire ω_0 et δ.
2. Donner la solution générale, en calculant les expressions de l'amplitude et de la phase des oscillations forcés.

Exercice 2: (10 points)

Soit le système électrique représenté par la figure ci-contre.



1. Etablir les équations différentielles en prenant comme coordonnées généralisées les charges électriques variant dans les deux mailles.
2. Déterminer les pulsations propres du système.
3. Etudier les modes propres d'oscillations pour : $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$
4. Donner les expressions des courants i_1 et i_2 .
5. Donner le système mécanique équivalent en précisant le type de couplage.

Bonne chance

Solution de l'examen de rattrapage du module physique3 (2013-2014)

Exercice 1 :

Le disque M effectue un mouvement de : translation + rotation $\boldsymbol{x_M = R\varphi \rightarrow \dot{x}_M = R\dot{\varphi}}$

La tige $\boldsymbol{m}\begin{cases} \boldsymbol{x_m = \frac{l}{2}\sin\theta} \\ \boldsymbol{y_m = \frac{l}{2}\cos\theta} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{v_m^2 = \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2}$

Mouvement du point **B** donc du ressort et de l'amortisseur : $\boldsymbol{x_B = -\frac{l}{2}sin\theta}$

Relation entre le mouvement du disque et de la tige : $\boldsymbol{R\varphi = \frac{l}{2}sin\theta \approx \frac{l}{2}\theta}$

Système libre amorti :

1. **Le lagrangien du système :**

a) **Energie cinétique :** $T = \frac{1}{2}J_{/C}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{M}\dot{x}^2{}_M + \frac{1}{2}J_{/O}\dot{\theta}^2$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{M}(R\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\dot{\theta}^2 \Longrightarrow \boldsymbol{T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\dot{\theta}^2}$$

$$\boldsymbol{R\dot{\varphi} = \frac{l}{2}\dot{\theta} \Longrightarrow T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}M + \frac{1}{12}m\right)l^2\dot{\theta}^2}$$

b) **Energie potentielle :** $\mathrm{U} = \mathrm{U}_k + \mathrm{U}_m = \frac{1}{2}k\left(\frac{l}{2}sin\theta\right)^2 + mg\left(-\frac{l}{2}\cos\theta\right)$

$$\boldsymbol{\mathrm{U} = \frac{1}{2}k\left(\frac{l}{2}sin\theta\right)^2 - mg\frac{l}{2}\cos\theta}$$

Donc le Lagrangien est : $L = \boldsymbol{T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}M + \frac{1}{12}m\right)l^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{l}{2}sin\theta\right)^2 + mg\frac{l}{2}\cos\theta}$

Pour les oscillations à faibles amplitudes $\boldsymbol{\sin\theta \approx \theta}$ et $\boldsymbol{\cos\theta \approx 1}$ **:**

$$\boldsymbol{L = T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}M + \frac{1}{12}m\right)l^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k\ \frac{l^2}{4}\theta^2 + mg\frac{l}{2}}$$

2. $\boldsymbol{L = \frac{1}{2}M_0l^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}K_0l^2\theta^2 + C^{te}\ ;\ D = \frac{1}{2}\alpha_0 l^2\dot{\theta}^2}$

Par comparaison avec **L** calculé**,** on trouve **:** $\boldsymbol{M_0 = \frac{3}{8}M + \frac{1}{12}m, K_0 = \frac{k}{4}, C^{te} = mg\frac{l}{2}}$

La fonction de dissipation : $\boldsymbol{D = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 \approx \frac{1}{2}\alpha\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2 \quad \Longrightarrow \alpha_0 = \frac{\alpha}{4}}$

Système forcé amorti :

Equation différentielle du mouvement forcé amorti :

Equations de Lagrange dans le cas d'un système forcé amorti en fonction de $\boldsymbol{\theta}$: $\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} + \mathcal{M}(F)}$

avec: $\boldsymbol{\mathcal{M}(F) = F\frac{l}{2}}$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = M_0l^2\dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \boldsymbol{M_0l^2\ddot{\theta}} \\ \frac{\partial L}{\partial\theta} = \boldsymbol{-k_0\ l^2\ \theta} \\ \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \boldsymbol{\alpha_0} l^2\dot{\theta} \end{cases}$$

L'équation différentielle : $\boldsymbol{M_0l^2\ddot{\theta} + \alpha_0}l^2\dot{\theta} + \boldsymbol{k_0\ l^2\ \theta = F\frac{l}{2} = F_0\frac{l}{2}e^{j\omega t}}$

On divise sur $\boldsymbol{M_0l^2}$ et on aura : $\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{\alpha_0}{M_0}\dot{\theta} + \frac{k_0}{M_0}\theta = \frac{F}{2M_0l}e^{j\omega t}}$………..**(1)**

1. **L'expression de l'amplitude A et la phase $\boldsymbol{\varphi}$ de la solution particulière représentant le régime forcé.** On peut écrire l'équation (1) comme suit :

$\boldsymbol{\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = B\ e^{j\omega t}}$………(2) $\qquad$ *tels que*: $2\delta = \frac{\alpha_0}{M_0}$, $\omega_0^2 = \frac{k_0}{M_0}$, $B = \frac{F}{2M_0l}$

La solution générale de l'équation (2) est : $\boldsymbol{\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t)}$

Pour $\boldsymbol{\delta < \omega_0}$ **:** $\boldsymbol{\theta_h(t) = Ce^{-\delta t}sin(\omega_a t + \phi)\ ;\ \ \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$, $\boldsymbol{\theta_p(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)}}$: On calcul A et φ en utilisant la notation complexe, l'équation (**2**) devient : $\boldsymbol{\ddot{\theta}_p(t) + 2\delta\dot{\theta}_p(t) + \omega_0^2\theta_p(t) = B\ e^{j\omega t}}$………(**3**)

$\dot{\theta}_p(t) = Aj\Omega e^{j(\Omega t + \varphi)}$, $\ddot{\theta}_p(t) = -A\Omega^2 e^{j(\Omega t + \varphi)}$, on remplace $\dot{\theta}_p(t), \ddot{\theta}_p(t)$ dans (3), on aura :

$$\boldsymbol{-A\omega^{2e^{j(\omega t+\varphi)}} + 2\delta Aj\omega e^{j(\omega t+\varphi)} + \omega_0^{2Ae^{j(\omega t+\varphi)}} = B\ e^{j\omega t} \Rightarrow A\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + j(2\delta\omega)\right] = Be^{-j\varphi} = B(\cos\varphi - j\sin\varphi)}$$

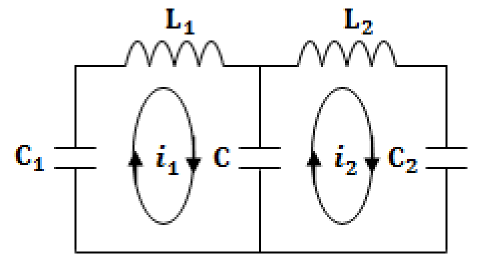
$$\begin{cases} \boldsymbol{A\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = B\cos\varphi \ldots\ldots(4)} \\ \boldsymbol{A(2\delta\omega) = -B\sin\varphi \ldots\ldots\ldots(5)} \end{cases} \Longrightarrow A^2[(\omega_0^2 - \boldsymbol{\omega^2})^2 + (2\delta\boldsymbol{\omega})^2] = B^2 \Longrightarrow \boldsymbol{A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}}$$

$$\frac{(5)}{(4)} = tg\varphi = -\frac{2\delta\boldsymbol{\omega}}{\omega_0^2 - \boldsymbol{\omega}^2} \Longrightarrow \boldsymbol{\varphi = Arctg\left(-\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)} \Longrightarrow \boldsymbol{\theta_p(t)}\frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\left(\boldsymbol{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^2 + (2\delta\boldsymbol{\omega})^2}}\boldsymbol{\cos(\omega t + Arctg(-\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2})}$$

La solution générale est : $\boldsymbol{\theta(t) = Ce^{-\delta t}sin(\omega_a t + \phi)} + \frac{(\frac{F}{2M_0l})}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2}}\boldsymbol{e^{j(\omega t + Arctg(-\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}))}}$

Exercice 2 :

Maille I :



$$u_{L_1} + u_{C_1} + u_C = 0 \Rightarrow L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} q_1 + \frac{1}{C}(q_1 - q_2) = 0$$

Avec : $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q} \Leftrightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$

On remplace dans l'équation:

$$L_1\ddot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}\right) q_1 - \frac{1}{C} q_2 = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Maille II :

$$u_{C_2} + u_{L_2} + +u_C = 0 \Rightarrow \frac{1}{C_2} q_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}(q_2 - q_1) = 0$$

$$L_2\ddot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C}\right) q_2 - \frac{1}{C} q_1 = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

Donc les 02 équations différentielles

sont : $\begin{cases} L_1\ddot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}\right) q_1 - \frac{1}{C} q_2 = 0 \ldots\ldots (1) \\ L_2\ddot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C}\right) q_2 - \frac{1}{C} q_1 = 0 \ldots\ldots (2) \end{cases}$

Remarque : On peut écrire les deux équations différentielles en fonction des 2 courants :

On a: $L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} q_1 + \frac{1}{C}(q_1 - q_2) = 0 \Longrightarrow$ **En dérivant** : $L_1 \frac{d^2i_1}{dt^2} + \frac{1}{C_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{1}{C}\frac{d(q_1-q_2)}{dt} = 0$

Avec: $i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \ddot{\imath} = \frac{d^2i}{dt^2} \Rightarrow \begin{cases} L_1\ddot{\imath}_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}\right) i_1 - \frac{1}{C} i_2 = 0 \ldots\ldots (1) \\ L_2\ddot{\imath}_2 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C}\right) i_2 - \frac{1}{C} i_1 = 0 \ldots\ldots (2) \end{cases}$

2. **Les pulsations propres du système :**

On suppose des solutions sinusoïdales

$\begin{cases} q_1(t) = A_1 sin(\omega t + \varphi) \\ q_2(t) = A_2 sin(\omega t + \varphi') \end{cases}$ ou en notation complexe $\begin{cases} q_1(t) = A_1 e^{j(\omega t+\varphi)} \\ q_2(t) = A_2 e^{j(\omega t+\varphi')} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1(t) = -\omega^2 q_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) = -\omega^2 q_2(t) \end{cases}$

Tel que : $q_1, q_{2,} \varphi\ et\ \varphi'$ sont des constantes.

On remplace dans les équations (1) et (2), on aura donc : $\begin{cases} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C} - L_1\omega^2\right) q_1 - \frac{1}{C} q_2 = 0 \ldots\ldots (3) \\ -\frac{1}{C} q_1 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C} - L_2\omega^2\right) q_2 = 0 \ldots. (4) \end{cases}$

On prend : $\boldsymbol{L_1 = L_2 = L,\ C_1 = C_2 = C}$

Et on aura : $\begin{cases} \left(\frac{2}{C} - L\omega^2\right) q_1 - \frac{1}{C} q_2 = 0 \ldots\ldots (5) \\ -\frac{1}{C} q_1 + \left(\frac{2}{C} - L\omega^2\right) q_2 = 0 \ldots. (6) \end{cases}$

Ce système admet des solutions non nulles si, et seulement si le déterminant ci-dessous est nul :

$\begin{vmatrix} (\frac{2}{C} - L\omega^2) & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{C} & (\frac{2}{C} - L\omega^2) \end{vmatrix} = 0$ Soit l'équation à résoudre : $\begin{cases} \left(\frac{2}{C} - L\omega^2\right)^2 = (\frac{1}{C})^2 \\ \frac{2}{C} - L\omega^2 = \mp\frac{1}{C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega^2{}_1 = \frac{1}{LC} \\ \omega^2{}_2 = \frac{3}{LC} \end{cases}$

3. **Les modes propres d'oscillations.**

Premier mode : on remplace dans (5) ou (6) par $\omega^2{}_1 = \frac{1}{LC}$:

On obtient après calcul : $q_2 = q_{1,}\ \overrightarrow{V_1}\binom{1}{1},\ \vec{V}_1$est le 1er vecteur propre

Deuxième mode :

On remplace dans (3) ou (4) par $\omega^2{}_2 = \frac{3}{LC}$:

On obtient après calcul : $q_2 = -q_1,\ \vec{V}_2\binom{1}{-1},\ \vec{V}_2$est le 2ème vecteur propre.

Donc les solutions sont :

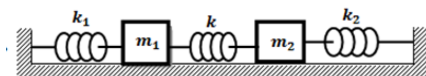
$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{j(\omega_1 t+\varphi)} + B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{j(\omega_2 t+\varphi')}$$

$$\begin{cases} q_1(t) = A\, e^{j(\omega_1 t+\varphi)} + B\, e^{j(\omega_2 t+\varphi')} \\ q_2(t) = A\, e^{j(\omega_1 t+\varphi)} - B\, e^{j(\omega_2 t+\varphi')} \end{cases}$$

4. **Les expressions des courants $\boldsymbol{i_1}$ $\boldsymbol{et\ i_2}$:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{i_1(t)} = \frac{dq_1(t)}{dt} = \boldsymbol{j}\omega_1 A\, e^{j(\omega_1 t+\varphi)} + j\omega_2 B\, e^{j(\omega_2 t+\varphi')} \\ \boldsymbol{i_2(t)} = \frac{dq_2(t)}{dt} = \boldsymbol{j}\omega_1 A\, e^{j(\omega_1 t+\varphi)} - j\omega_2 B\, e^{j(\omega_2 t+\varphi')} \end{cases}$$

5. Le système mécanique équivalent : Le couplage est **ELASTIQUE**.



Examen du module Physique3

Questions de cours : (06points)

a) Pour les **2** Lagrangiens suivants, donner le type de couplage et expliquer pourquoi :

1- $L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(x - a\sin\theta)^2 + m_2 gl.\cos\theta$

2- $L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2{}_1 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2{}_2 - \frac{1}{2}kx^2{}_2$

3- $L = \frac{1}{2}m_1 l^2{}_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2\right)^2 + gl_1(m_1 + m_2)\cos\theta_1 + m_2 gl_2.\cos\theta_2$

b) Associer les équations différentielles suivantes avec les mailles corespondantes:

(a): $L_1\ddot{q}_1 + (R_1 + R)\dot{q}_1 + \frac{1}{C_1}q_1 = R\,\dot{q}_2$

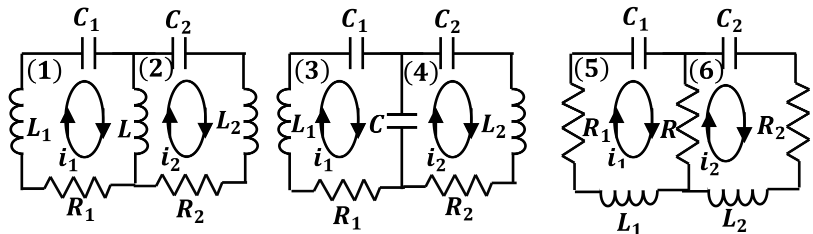
(b): $L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + (\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C})q_1 = \frac{1}{C}\,q_2$

(c): $(L_1 + L)\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \frac{1}{C_1}q_1 = L\,\ddot{q}_2$

(d): $L_2\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C}\right)q_2 = \frac{1}{C}\,q_1$

(e): $L_2\ddot{q}_2 + (R_2 + R)\dot{q}_2 + \frac{1}{C_2}q_2 = R\,\dot{q}_1$

(f): $(L_2 + L)\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 + \frac{1}{C_2}q_2 = L\,\ddot{q}_1$



Exercice 1 : (08 points)

Une tige rigide de masse négligeable et de longueur $2l$ porte à chacune de ses extrémités un ressort (k, m) et peut pivoter autour de son axe horizontal fixe situé en son milieu. L'un des deux ressorts est attaché à un amortisseur vertical de coefficient de frottement visqueux α_1. L'autre ressort est attaché à deux ressorts de constante de raideur k.
Au milieu de la tige est suspendue, par l'intermédiaire d'une barre de masse négligeable et de longueur l, une masse $\frac{m}{3}$ sur laquelle on fixe un ressort de constante de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α_2. **(Figure 1).**

1. Donner le système équivalent.
2. Trouver l'équation différentielle du mouvement libre amorti.
3. Donner la solution de l'équation différentielle du mouvement dans le cas d'un mouvement oscillatoire, en précisant les valeurs de δ et ω_a.

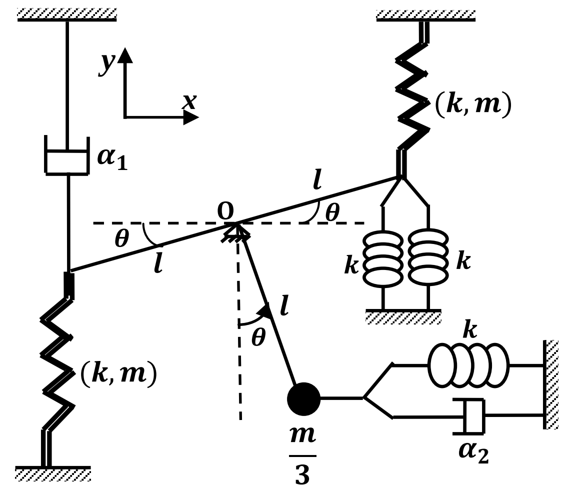


Figure 1

Exercice 2 : (06 points)

Soit un système oscillant constitué d'une masse m attachée à **2** ressorts de constante de raideur $\frac{k}{2}$ chacun et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux.
On applique à la masse m une force $F(t) = F_0\,sin(\omega t)$ **(Figure 2).**

1. Trouver l'équation différentielle du mouvement forcé amorti.
2. Ecrire la solution générale de l'équation différentielle.
3. Donner la solution homogène $x_h(t)$ et tracer sa courbe pour $\delta < \omega_0$
4. Calculer pour la solution particulière $x_p(t)$, l'amplitude **A** et la phase φ.

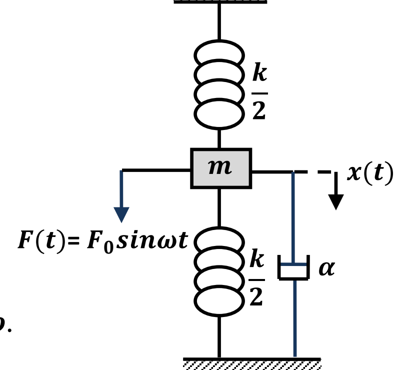


Figure 2

Bonne Chance

Solution de l'examen du module Physique3 (Janvier 2015)

Questions de cours (06points)

a) Pour les **2** Lagrangiens suivants on donne le type de couplage :

1 – $L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(x - a\sin\theta)^2 + m_2 gl.\cos\theta \Rightarrow$ **Couplage élastique** (0.5pt)

- Le terme $\frac{1}{2}k(x - a\sin\theta)^2$ montre bien qu'il ya un couplage par l'intermédiare d'un ressort (Elasticité) (0.5pt)

2 – $L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2{}_1 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2{}_2 - \frac{1}{2}kx^2{}_2 \Rightarrow$ **Couplage visqueux** (0.5pt)

- On ne voit aucun terme qui montre le couplage càd que le terme est écrit dans la fonction de dissipation (0.5p)

3 – $L = \frac{1}{2}m_1 l^2{}_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2\right)^2 + gl_1(m_1 + m_2)\cos\theta_1 + m_2 gl_2.\cos\theta_2 \Rightarrow$ **Couplage inertiel**

- Le terme $\frac{1}{2}m_2\left(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2\right)^2$ montre bien qu'il ya un couplage par l'intermédiare d'une masse (Inertie) (0.5pt)

(0.5pt)

b) Les réponses sont: **(a) ⟹(5), (b) ⟹(3), (c) ⟹(1), (d) ⟹(4), (e) ⟹(6), (f) ⟹(2).**

0.5pt chaque réponse juste

Exercice 1 : (08 points)

1. **Le système équivalent:**

On peut remplacer les **2** ressorts (k, m) par **2** ressorts k de masses négligeables et **2** masses $\frac{m}{3}$ attachées aux **2** extrémités de la tige.

Les **2** ressorts k sont en parallèles donc le ressort équivalent est un ressort $2k$. Le ressort $2k$ devient en parallèles avec le ressort k et le ressort équivalent sera un ressort $3k$. (1 pt)

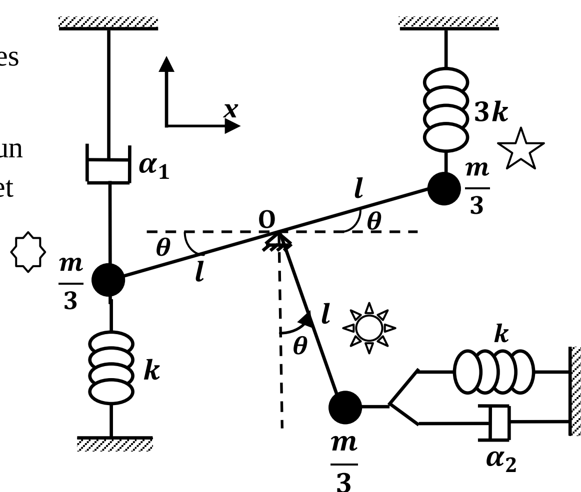


Figure 1

2. **L'équation différentielle du mouvement :**

a) Les coordonnées du système :

$\frac{m}{3}\begin{cases} -l\cos\theta \\ -l\sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l\dot{\theta}\sin\theta \\ -l\dot{\theta}\cos\theta \end{cases} \Rightarrow v^2_{\frac{m}{3}} = l^2\dot{\theta}^2$ (0. 5pt)

$k : -l\sin\theta$

$\alpha_1 : l\sin\theta \rightarrow l\dot{\theta}\cos\theta$

$\frac{m}{3}\begin{cases} l\cos\theta \\ l\sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l\dot{\theta}\cos\theta \\ l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow v^2_{\frac{m}{3}} = l^2\dot{\theta}^2$ (0. 5pt)

$3k : -l\sin\theta$

$\frac{m}{3}\begin{cases} l\sin\theta \\ -l\cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l\dot{\theta}\cos\theta \\ l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow v^2_{\frac{m}{3}} = l^2\dot{\theta}^2$ (0. 5pt)

$k : l\sin\theta$

$\alpha_2 : l\sin\theta \rightarrow l\dot{\theta}\cos\theta$

- **L'énergie cinétique du système :** $T = T_{\frac{m}{3}} + T_{\frac{m}{3}} + T_{\frac{m}{3}} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ (1pt)
- **L'énergie potentielle du système :** On choisi l'axe (ox) comme origine des énergies potentielles :

$$U = U_k + U_{3k} + U_k + U_m = \frac{1}{2}k(l\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}(3k)(-l\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}k(l\sin\theta)^2 - \frac{m}{3}g\,l\cos\theta$$

(1pt) $$\Rightarrow U = \frac{1}{2}(5k)l^2\sin^2\theta - \frac{m}{3}g\,l\cos\theta$$

- **La fonction de dissipation** : $D = D_1 + D_2 = \frac{1}{2}\alpha_1(l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}\alpha_2(l\dot{\theta}\cos\theta)^2$

$\Rightarrow D = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta \cong \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)l^2\dot{\theta}^2$ (1pt)

- **La fonction de Lagrange :** $L = T - U$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(5k)l^2\sin^2\theta + \frac{m}{3}g\,l\cos\theta$$ (0.25pt)

L'équation de Lagrange s'écrit : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}$ (0.25pt)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial\theta} = -5k\,l^2\sin\theta.\cos\theta - \frac{m}{3}g\,l\sin\theta \\ \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = (\alpha_1 + \alpha_2)l^2\dot{\theta} \end{cases}$$

(0.5pt) (0.25pt) (0.25pt)

$\Rightarrow ml^2\ddot{\theta}+(\alpha_1+\alpha_2)l^2\dot{\theta}+(5k\,l^2+\frac{m}{3}g\,l)\,\theta=0$ — 0.25pt

C'est l'équation différentielle d'un mouvement libre amorti

3. La solution de l'équation différentielle dans le cas d'un mouvement oscillatoire est possible si le système est faiblement amorti : $\delta < \omega_0$: $\theta(t) = C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t+\varphi)$ — 0. 25pt

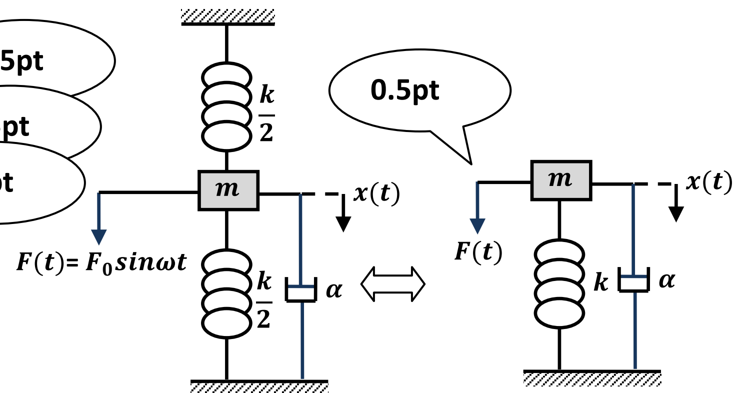
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{m}\dot{\theta} + \left(\frac{15k+mg}{3ml}\right)\theta = 0$$

La solution réduite : $\ddot{x}+2\delta\,\dot{x}+\omega^2{}_0 x = 0$ **avec** $2\delta = \frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{m} \Rightarrow \delta = \frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{2m}$ **et** $\omega^2{}_0 = \frac{15k+mg}{3ml}$

Donc : $\omega_a = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{15k+mg}{3ml} - \frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{2m}}$ — 0.5pt

Exercice 1 : (06points)

Le système équivalent :



1. **L'équation différentielle du mouvement:**

- **L'énergie cinétique du système :** $T = \frac{1}{2}\,m\dot{x}^2$ — 0.5pt
- **L'énergie potentielle du système** : $U = \frac{1}{2}\,kx^2$ — 0.5pt
- **La fonction de dissipation** : $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$ — 0.5pt

La fonction de Lagrange: $L = T - U = \frac{1}{2}\,m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\,kx^2$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} & \text{0.5pt} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -kx & \text{0.25pt} \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x} & \text{0.25pt} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura : $m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x} + F_0\sin\omega t$

On divise alors par m et on trouve : $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t \rightarrow \ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \omega^2{}_0 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t = B\sin\omega t$

La solution totale de l'équation du mouvement est : $x(t) = x_h(t) + x_P(t)$ — 0.25pt

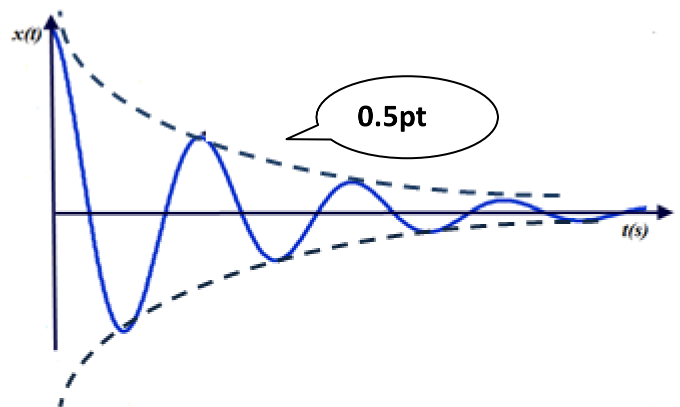
2. Solution homogène :

La solution homogène correspond à la solution de l'équation différentielle sans second membre :

$\ddot{x} + 2\delta\,x + \omega^2{}_0 x = 0$; C'est l'équation différentielle d'un mouvement libre amorti

$\Rightarrow x_h(t) = C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \emptyset)$ — 0.25pt

avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}$



3. La solution particulière $x_p(t)$

Calcul de l'amplitude A

$\mathfrak{z}_P(t)$ Vérifie l'équation différentielle avec second membre :

$\ddot{\mathfrak{z}}_P + 2\delta\,\dot{\mathfrak{z}}_P + \omega^2{}_0\mathfrak{z}_P = \frac{F_0}{m}e^{j\omega t} = Be^{j\omega t}$ (*)

$\mathfrak{z}_P(t) = A\,e^{j(\omega t+\varphi)} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{\mathfrak{z}}_P(t) = A\,j\omega\,e^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega\,\mathfrak{z}_P(t) \\ \ddot{\mathfrak{z}}_P(t) = Aj^2\omega^2e^{j(\omega t+\varphi)} = -\omega^2\,\mathfrak{z}_P(t) \end{cases}$$ — 0.5pt

On remplace dans (*) et on trouve : $-\omega^2\,\mathfrak{z}_P(t) + 2\delta j\omega\,\mathfrak{z}_P(t) + \omega^2{}_0\,\mathfrak{z}_P(t) = Be^{j\omega t}$

$\Rightarrow [(\omega^2{}_0 - \omega^2) + 2\delta\omega j]\,\mathfrak{z}_P(t) = [(\omega^2{}_0 - \omega^2) + 2\delta\omega j]\,A\,e^{j(\omega t+\varphi)} = Be^{j\omega t}$

$\Rightarrow [(\omega^2{}_0 - \omega^2) + 2\delta\omega j]\,Ae^{j\varphi} = B$

On divise sur "$e^{j\varphi}$" et on trouve: $[(\omega^2{}_0 - \omega^2) + 2\delta\omega j]\,A = Be^{-j\varphi}$ … … … (1) — 0.5pt

Le conjugué de cette équation est : $[(\omega^2{}_0 - \omega^2) - 2\delta\omega j]\,A = Be^{j\varphi}$ … … … (2)

$$(1)X(2) \Rightarrow A^2[(\omega^2{}_0 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2] = B^2 \Rightarrow A = \frac{B}{\sqrt{(\omega^2{}_0 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$ — 0.5pt

Calcul de φ

$$[(\omega^2{}_0 - \omega^2) + 2\delta\omega j]\,A = \begin{cases} Be^{-j\varphi} \\ B\,(\cos\varphi - j\,\sin\varphi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(\omega^2{}_0 - \omega^2) = B\cos\varphi \\ 2\delta\omega A = -B\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow tg\varphi = \frac{-2\delta\omega}{(\omega^2{}_0 - \omega^2)}$$ — 0.5pt

$$\Rightarrow \varphi = Arctg\left(\frac{-2\delta\omega}{(\omega^2{}_0 - \omega^2)}\right)$$

Donc : $x_P(t) = \frac{B}{\sqrt{(\omega^2{}_0-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}}\sin\left[\omega t + Arctg\,\frac{-2\delta\omega}{(\omega^2{}_0-\omega^2)}\right]$

Examen de rattrapage du module Physique 3

Exercice 1 : (05 points)

Soit le système vibratoire suivant (**Figure 1**).

Le support **B** est animé d'un mouvement sinusoïdal: $y(t) = B_0 \cos\Omega t$.

1. Quel est le nombre de degré de liberté de ce système **?.**
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement pour les oscillations de faibles amplitudes en utilisant le formalisme de Lagrange**.** $(m_1 = m_2 = m_3 = m)$
3. Que représente le deuxième terme de l'équation différentielle du mouvement **?.** Dans le cas ou ce terme est nul, donnez la solution de l'équation différentielle du mouvement et déduire la pulsation propre du système**.**

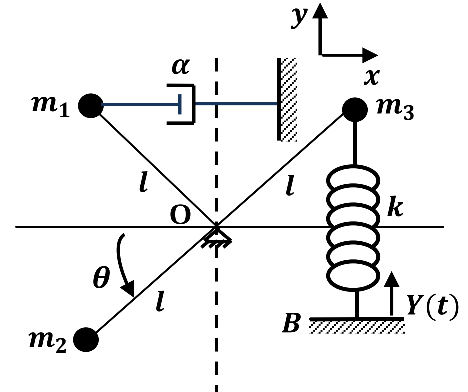


Figure 1

Exercice 2 : (07 points)

Un disque homogène de masse **M** et de rayon **R** roule sans glissement sur un plan horizontal. Une tige rigide, de longueur l, de masse négligeable, est solidaire du disque en un point **O**, à une extrémité et comporte une masse ponctuelle m à son autre extrémité.

Les points **A** et **O** sont reliés à deux bâtis fixes respectivement par un Ressort de raideur k_1, un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α et un ressort de raideur k_2.

Dans le cas d'un système faiblement amorti :

1. Etablir l'équation differentielle du mouvement libre amorti.

2. Donner l'expression de la solution générale $\theta(t)$.

On donne : $k_1 + 4k_2 = k = \frac{mg}{l}$ $et\ m = \frac{3}{2}M, J/_0 = \frac{1}{2}MR^2$ $, l = 2R$

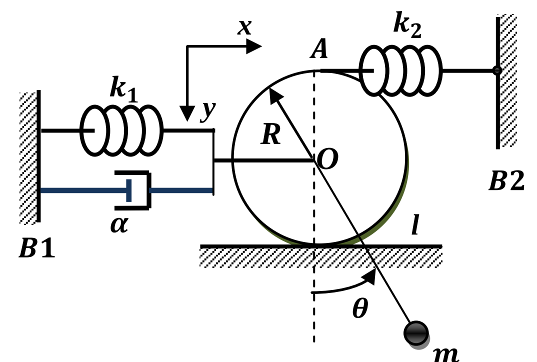


Figure 2

Exercice 3 : (08 points)

Deux disques, ***(M, R)*** et ***(m, r)*** reliés par un fil non glissant et inextensible, peuvent tourner librement autour de leurs axes fixes. Le grand disque porte à sa périphérie une masse ponctuelle m. Le système est soumis à une force de frottement visqueux de coefficient α .

On applique à la masse m une force: $F(t) = F_0\, e^{j\omega t}$

1. Trouver l'équation différentielle du mouvement forcé amorti.
2. Trouver la solution générale de l'équation différentielle.

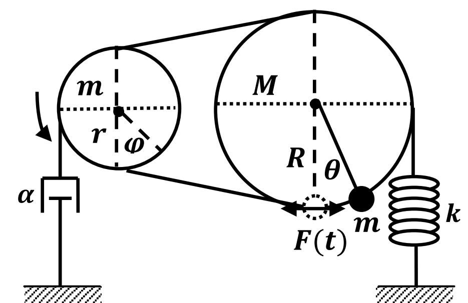
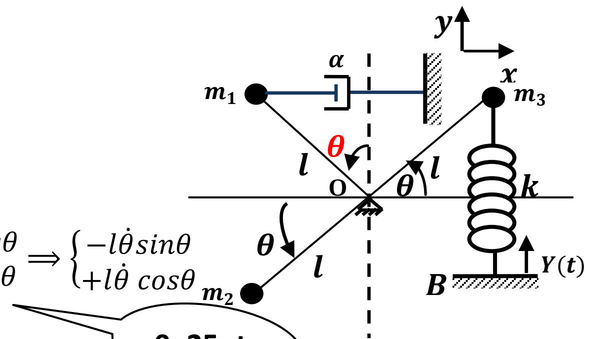


Figure 3

Bonne Chance

Solution de l'examen de rattrapage du module Physique3 (Avril 2015)

Exercice 1 : (05points)



1. **Détermination du nombre de dégrée de liberté du système :**

Le système est à **1 d.d.l** et la variable est θ par contre $y(t)$ représente le mouvement du bâti **B**.

2. **Ecriture de l'équation différentielle du mouvement.**

- **Coordonnées des masses :**

$$m_1\begin{cases}-l\sin\theta\\+l\cos\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-l\dot\theta\cos\theta\\-l\dot\theta\sin\theta\end{cases},\quad m_2\begin{cases}-l\cos\theta\\-l\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}+l\dot\theta\sin\theta\\-l\dot\theta\cos\theta\end{cases},\quad m_3\begin{cases}+l\cos\theta\\+l\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-l\dot\theta\sin\theta\\+l\dot\theta\cos\theta\end{cases}$$

0. 25pt 0. 25pt 0. 25pt

- **Energie cinétique:** $T = T_{m_1} + T_{m_2} + T_{m_3}$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)l^2\dot\theta^2 = \frac{3}{2}ml^2\dot\theta^2$$ 0. 5pt

- **Energie potentielle :** $U = U_{m_1} + U_k$ 0. 5pt

$$U = mgl\cos\theta + \frac{1}{2}k(l\sin\theta - y)^2$$

- **Fonction de dissipation D:** $D = \frac{1}{2}\alpha(l\dot\theta\cos\theta)^2 \approx \frac{1}{2}\alpha(l\dot\theta)^2$ 0. 5pt

- **Fonction de Lagrange :** $L = T - U \Rightarrow L = \frac{3}{2}ml^2\dot\theta^2 - mgl\cos\theta - \frac{1}{2}k(l\sin\theta - y)^2$

- **Formalisme de Lagrange:** $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot\theta}$

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) = 3ml^2\ddot\theta\\ \frac{\partial L}{\partial\theta} = mgl\sin\theta - k(l\cos\theta)(l\sin\theta - y)\\ \frac{\partial D}{\partial\dot\theta} = \alpha l^2\dot\theta\end{cases}$$

0. 25pt 0. 5pt 0. 5pt

Pour les oscillations de faibles amplitudes $\begin{cases}\sin\theta\approx 0\\\cos\theta\approx 1\end{cases}$: $3ml^2\ddot\theta + \alpha l^2\dot\theta - mgl\theta + kl(l\theta - y) = 0$

$$\Rightarrow 3ml^2\ddot\theta + \alpha l^2\dot\theta + (kl^2 - mgl)\theta = kly$$

3. **Définition du 2ème terme:** Le second terme dans l'équation différentielle représente la force excitatrice extérieure dû au bâti au point B.

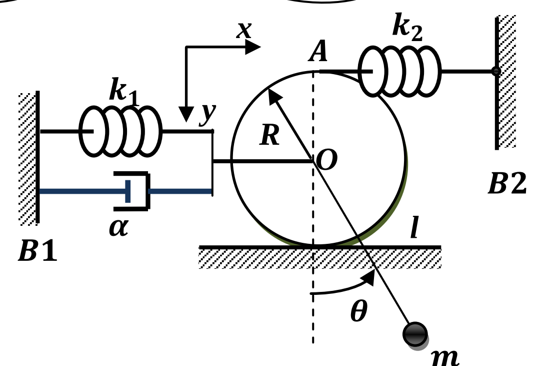
   - Si le terme: $kly = klB_0\cos\Omega t = 0$, on aura: $3ml^2\ddot\theta + \alpha l^2\dot\theta + (kl^2 - mgl)\theta = 0$ 0. 5pt

L'équation réduite **:** $\ddot\theta + 2\delta\dot\theta + \omega^2{}_0\theta = 0$ avec : $2\delta = \frac{\alpha}{3m}$ et $\omega^2{}_0 = \frac{kl - mg}{3ml}$

Si : $\delta < \omega_0$ **:** On aura un système faiblement amorti ; la solution sera : $\theta(t) = C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi)$

Avec : $\delta = \frac{\alpha}{6m}$, $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{kl - mg}{3ml} - \frac{\alpha^2}{36m^2}}$ 0. 5pt 0. 5pt

Exercice 2 : (07 points)



1. Ecriture de l'équation differentielle du mouvement libre amorti.

   - **Coordonnées des masses M et m :**

$$M\begin{cases}-R\theta\\0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-R\dot\theta\\0\end{cases}$$ 0. 5pt

$$m\begin{cases}-R\theta + l\sin\theta\\0 + l\cos\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-R\dot\theta + l\dot\theta\cos\theta\\-l\dot\theta\sin\theta\end{cases}$$ 0. 5pt

   - **Energie cinétique:** $T = T_M + T_m$

$$T_M = \frac{1}{2}MR^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}J/_0\dot\theta^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot\theta^2$$

$$T_m = \frac{1}{2}m[R^2 + l^2 - 2Rl\cos\theta]\dot\theta^2 = \frac{1}{2}m(R - l)^2\dot\theta^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{3MR^2}{2} + m(R - l)^2\right]\dot\theta^2$$ 0. 5pt

Energie potentielle : $U = U_m + U_{k1} + U_{k2}$

$U = -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}k_1(R\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(2R\theta)^2$ 0. 5pt

- **Fonction de dissipation D:** $D = \frac{1}{2}\alpha(R\dot{\theta})^2$ 0. 5pt

- **Fonction de Lagrange :** $L = T - U = \frac{1}{2}\left[\frac{3MR^2}{2} + m(R-l)^2\right]\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta - \frac{1}{2}k_1(R\theta)^2 - \frac{1}{2}k_2(2R\theta)^2$ 0. 5pt

  - **Formalisme de Lagrange :** $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}$

  - $\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = [\frac{3MR^2}{2} + m(R-l)^2]\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial\theta} = -mgl\sin\theta - k_1R^2\theta - 4k_2R^2\theta \\ \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta} \end{cases}$ 0. 5pt 0. 5pt 0. 5pt

Pour les oscillations de faibles amplitudes : $\left[\frac{3MR^2}{2} + m(R-l)^2\right]\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + \left[mgl + (k_1+4k_2)R^2\right]\theta=0$ 0. 5pt

En tenant compte des approximations données : $2m\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + 5k\theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{2m}\dot{\theta} + \frac{5k}{2m}\theta = 0$ 1pt

2. l'équation réduite : $\ddot{\theta} + 2\delta\,\dot{\theta} + \omega^2{}_0\theta = 0$ avec : $2\delta = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega^2{}_0 = \frac{5k}{2m}$

Si : $\delta < \omega_0$ **:** On aura un système faiblement amorti ; la solution sera : $\theta(t) = C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi)$ 0. 5pt

Avec : $\delta = \frac{\alpha}{4m}$, $\omega_a = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{5k}{2m} - \frac{\alpha^2}{16m^2}}$ 0. 5pt

Exercice 3 : (08 points)

1. Ecriture de l'équation differentielle du mouvement forcé amorti

   - $m\begin{cases} R\sin\theta \\ R\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R\dot{\theta}\cos\theta \\ -R\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \rightarrow v^2{}_m = R^2\dot{\theta}^2$ 0. 5pt
   - **Energie cinétique:** $T = T_{Disque\ m} + T_{Disque\ M} + T_m$

     $T = \frac{1}{2}J_m + \frac{1}{2}J_M + \frac{1}{2}mv^2{}_m = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$ 0. 5pt

On a : $r\varphi = R\theta \Rightarrow T = \frac{1}{2}[\frac{3m+M}{2}]R^2\dot{\theta}^2$ 0. 5pt

   - **Energie potentielle :** $U = U_k + U_m$

     $U = \frac{1}{2}k(R\theta)^2 - mgR\cos\theta$ 0. 5pt 0. 5pt
   - **Fonction de dissipation D:** $D = \frac{1}{2}\alpha\,(r\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2}\alpha\,R^2\dot{\theta}^2$

- **Fonction de Lagrange :** $L = T - U = \frac{1}{2}[\frac{3m+M}{2}]R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(R\theta)^2 + mgR\cos\theta$
- **Formalisme de Lagrange :** $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} + F(t).R$ 01 Pt
- $\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = [\frac{3m+M}{2}]R^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial\theta} = -kR^2\theta - MgR\sin\theta \\ \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta} \end{cases}$ 0. 5pt 0. 5pt 0. 5pt

   - L'équation du mouvement : $[\frac{3m+M}{2}]R^2\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + \left[kR^2 + mgR\right]\theta = F_0\,R\,e^{j\omega t}$ 0. 5pt

   L'équation réduite : $\ddot{\theta} + 2\delta\,\dot{\theta} + \omega^2{}_0\theta = Be^{j\omega t}$ avec : $2\delta = \frac{2\alpha}{3m+M}$ et $\omega^2{}_0 = \frac{2(kR^2+mgR)}{3m+M}$

   et $B = \frac{2F_0}{(3m+M)R}$ 0. 5pt

2. Ecrire la solution générale de l'équation différentielle.
   La solution de l'équation différentielle est : $\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t)$ 0. 5pt

Si : $\delta < \omega_0$: $\theta_h(t) = C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \emptyset)$ avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}$ 0. 5pt

$\theta_p(t) = A\,e^{j(\omega t+\varphi)}$ avec $A = \frac{B}{\sqrt{(\omega^2{}_0-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}}$ et $\varphi = Arctg\,(\frac{-2\delta\omega}{\omega^2{}_0-\omega^2})$

0. 5pt 0. 5pt